PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ESPECIALES

2.ª Edición

María E. Ballvé
Ana M. Porto
Miguel Delgado
Teresa Ulecia

SANZ Y TORRES

SEGUNDA EDICIÓN

Problemas de Matemáticas Especiales

Problemas de Matemáticas Especiales

María E. Ballvé Miguel Delgado
Ana M. Porto Teresa Ulecia
U.N.E.D.

SANZ Y TORRES

Prólogo

El presente libro contiene una amplia y seleccionada colección de problemas que corresponden a cada uno de los capítulos del libro "Matemáticas Especiales", de E. Bujalance y otros, publicado en esta misma editorial, con el que constituye una eficaz herramienta de estudio, ya que la resolución de ejercicios es una tarea muy importante en el estudio de las Matemáticas. En esta colección encontrará el lector resueltos todos los problemas propuestos en el libro citado anteriormente.

La elección de los problemas se ha efectuado de forma que se cubran los principales tipos básicos de problemas y las principales técnicas de resolución. Todos los problemas están completa y detalladamente resueltos, poniendo un énfasis especial en la claridad de las resoluciones, aún a costa de alargar, a veces, su desarrollo. Los grados de dificultad son diferentes, variando desde cuestiones sencillas hasta otras que requieren un mayor conocimiento de los principios teóricos correspondientes. La dificultad es proporcional al número del problema, por ello, se recomienda que se resuelvan los problemas en el orden de presentación, además, los problemas con varios apartados presentan en cada uno de ellos un nuevo aspecto de la resolución.

En todo caso, se ha obtado siempre por soluciones de tipo metódico frente a las de "idea feliz", primando la claridad sobre la originalidad, de manera que el lector pueda aprender y adquirir las diferentes técnicas de resolución con el menor esfuerzo posible. Los pasos de la solución de cada problema están detallados exhaustivamente, encontrando el lector que algunas explicaciones se escriben en letra de menor tamaño y entre paréntesis, para indicar que si se comprende el correspondiente paso, no es necesario leer la explicación del mismo, y si no se comprende, este texto lo clarifica. Esto suele suceder cuando el paso es muy sencillo, se ha realizado anteriormente algún otro paso similar, o se deduce de manera inmediata de las cuestiones teóricas

correspondientes. También, se presentan algunos comentarios teóricos que se distingue en el texto por su aspecto de letra inclinada. En general, se considera que un problema está suficientemente desarrollado si únicamente se tiene en cuenta el texto de tamaño y aspecto normal.

Los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, reales y complejos se representan por **N**, **Z**, **Q**, **R** y **C** respectivamente.

El libro está especialmente pensado para los alumnos de la asignatura "MATEMATICAS ESPECIALES" del "Curso de Acceso de Mayores de 25 Años" de la U.N.E.D., habiéndose tenido en cuenta en su redacción las necesidades de dichos alumnos, aunque pensamos que puede ser igualmente útil para todos aquellos que deseen introducirse en el estudio de las Matemáticas.

Deseamos que este libro cumpla el objetivo de facilitar la tarea al lector y le sirva de ayuda eficaz.

Los Autores.

Indice General

1. Números enteros y racionales, 1
2. Números reales, 9
3. Elementos de la teoría de conjuntos, 21
4. Combinatoria, 33
5. Probabilidad, 43
6. Estadística descriptiva, 55
7. Sistemas de ecuaciones lineales, 65
8. Matrices y determinantes, 77
9. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales, 89
10. Elementos de geometría, 107
11. Trigonometría, 115
12. Introducción a la geometría analítica, 127
13. Vectores del plano, 137
14. Números complejos, 147
15. Vectores del espacio, 157
16. Geometría analítica del plano, 167
17. Geometría analítica del espacio, 177

18. Sucesiones, 187
19. Cálculo de límites de sucesiones, 197
20. Funciones, 209
21. Polinomios, 223
22. Límites de funciones, 237
23. Funciones continuas, 249
24. Funciones derivables, 261
25. Estudio y representación de funciones, 273
26. Funciones trigonométricas, 301
27. Funciones logarítmicas y exponenciales, 313
28. Primitivas de una función, 327
29. Cálculo de primitivas, 337
30. La integral definida, 347

Por lo tanto, los divisores naturales del número 72 son:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 24, 36, 72.$$

y los divisores enteros del número 72 son:

$$-1, -2, -3, -4, -6, -9, -8, -12, -18, -24, -36, -72$$
$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Problema 5

Calcúlese el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números:

a) 168 y 300 b) 120 y 350

Solución.

a) Descomponemos los dos números en factores primos,

$$168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7,$$

$$300 = 2 \cdot 150 = 2 \cdot 2 \cdot 75 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Para determinar el máximo común divisor de ambos números

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad ; \quad 300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

consideramos el producto de los factores primos comunes en las dos descomposiciones. En este caso $2 \cdot 2 \cdot 3$, es decir, m.c.d(168,300) = 12.

Para determinar el mínimo común múltiplo le quitamos al producto de los dos números los factores comunes en los desarrollos. En este caso

$$168 \cdot 300 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

y debemos quitar los factores 2, 2 y 3, es decir,

$$\text{m.c.m.}(168,300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 = 4200.$$

Obsérvese que $\text{m.c.m.}(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{\text{mcd}(a, b)}$

b) La descomposición de los dos números en factores primos es:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad ; \quad 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Así pues,

m.c.d.(120,350) $= 2 \cdot 5 = 10$ (es el producto de los factores primos comunes en los desarrollos, 2 y 5, con el menor índice (exponente) de repetición de cada uno de estos factores, en este caso, 1 y 1).

m.c.m.(120,350) $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4200$ (es el producto de todos los factores primos presentes en algún desarrollo, 2,3,5 y 7, con el mayor índice (exponente) de repetición para cada uno de los factores, en este caso, 3, 1,2 y 1).

Problema 6

Determinar el menor número de soldados de una compañía si se sabe que en formación de

TEMA 1

Números enteros y racionales

Problema 1

Determinar tres números pares consecutivos tales que su suma sea 66.

Solución. Dado un número entero n, los dos siguientes números enteros son $n+1$ y $n+2$. Así pues, tres números pares consecutivos están descritos por las expresiones

$$2n \ , \ 2(n+1) \ \text{ y } \ 2(n+2) \rightarrow 2n \ , \ 2n+2 \ , \ 2n+4$$

Por lo tanto, $2n+(2n+2)+(2n+4) = 66$, (al aplicar las propiedades de las operaciones con números enteros)

$$2n+2n+2+2n+4 = 66,$$

$$3(2n)+2+4 = 66,$$

$$3 \cdot 2 \cdot n + 6 = 66, \text{ (habitualmente escribimos } 6n=66-6)$$

$$6n = 60, \text{ (como 60 es divisible por 6; } 60=6 \cdot 10)$$

$$6n = 6 \cdot 10,$$

$$n = 10.$$

Luego, los números en cuestión son 20, 22 y 24.

Problema 2

Demuéstrese que dado un número entero a, entonces a, $a-1$, $a-2$ o $a-3$ es múltiplo de 4.

Solución. Dado un par de números enteros a y b con $b \neq 0$, entonces existe un único número entero q y un único número natural r, con $r < |b|$ tales que

$$a = b \cdot q + r.$$

Obsérvese que se indica que r es un número natural y puede parecer que la expresión

anterior no se verifica en el caso de ser a un número negativo debido al algoritmo que se suele aplicar en la división de un número negativo entre un positivo. Por ejemplo, para dividir -7 entre cuatro, se realizan los siguientes pasos:

1° *Se escribe -7 como producto de dos números* $-7 = -|-7| = -1 \cdot 7$.

2° *Se divide* $|-7|$ *entre* 4 ; $7 = 4 \cdot 1 + 3$.

3° *Se escribe* $-7 = -1 \cdot |-7| = -1 \cdot (4 \cdot 1 + 3) = 4 \cdot (-1) - 3$.

En este ejemplo, utilizando el algoritmo de la división como se ha establecido debería escribirse

$$-7 = 4 \cdot (-2) + 1,$$

es decir, si $a = -7$ *y* $b = 4$, *entonces* $q = -2$ *y* $r = 1$.

Así pues, se verifica una única igualdad de cada grupo de las cuatro igualdades siguientes:

$a = 4q + 0$		$a = 4q$
$a = 4q + 1$		$a - 1 = 4q$
$a = 4q + 2$	cada igualdad se transforma en	$a - 2 = 4q$
$a = 4q + 3$		$a - 3 = 4q$

Un único número de los cuatro a, a - 1, a - 2 y a - 3 es divisible por 4. Obsérvese que puede ser cero.

Problema 3

Calcúlese el cociente y el resto al aplicar el Algoritmo de la División a los números a y b siguientes:

a) $a = 122$, $b = 5$ b) $a = -89$, $b = 3$

c) $a = 79$, $b = -4$ d) $a = -101$, $b = -4$

Se considera a como el dividendo y b como el divisor.

Solución.

a) El número a puede expresarse como 120 + 2. Ahora bien, 120 es divisible por cinco (pues termina en 0), además, es el mayor número divisible por 5 que es menor que 122.

$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 24 \cdot 5$,

así pues, $122 = 120 + 2 \rightarrow 122 = 24 \cdot 5 + 2$.

b) El número a puede expresarse como - 90 + 1. Ahora bien, $-90 = -1 \cdot 90$ y 90 es divisible por tres (pues la suma de sus cifras es divisible por 3).

$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \cdot 3$,

así pues, $-89 = -90 + 1 = 90(-1) + 1 = 3 \cdot 30 \cdot (-1) + 1 = 3 \cdot (-30) + 1$.

c) El número a puede expresarse como (80 -1, 76 + 4 -1 o) 76 + 3. El número 76 es un número divisible por cuatro.

$76 = 2 \cdot 38 = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 4 \cdot 19 \rightarrow 76 = (-4) \cdot (-19)$,

así pues, $79 = (-4) \cdot (-19) + 3$.

d) El número a puede expresarse como (-100 -1 o como -100 -4 + 4 -1) $-104 + 3$. El número -104 es divisible por -4 puesto que 104 es divisible por 4,

$104 = 2 \cdot 52 = 2 \cdot 2 \cdot 26 = 4 \cdot 26$,

$-104 = -1 \cdot 104 = (-1) \cdot 4 \cdot 26 = (-4) \cdot 26$.

Así pues, $-101 = (-4) \cdot 26 + 3$

Problema 4

Determinar todos los divisores enteros de los siguientes números:

a) $a = -210$ b) $a = 72$

Solución. Para determinar todos los divisores enteros de un número entero, primero determinamos todos los divisores naturales del valor absoluto de dicho número entero. Cualquier número entero a y su valor absoluto $|a|$ tienen los mismos divisores.

a) Se considera de $|a| = 210$ su descomposición en factores primos,

$$210 = 2 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Como posee cuatro factores primos, entonces cualquier producto de factores presentes en la descomposición constituye un divisor. Así pues, consideramos

Elemento que no es factor	1 (210 es divisible por 1).
Productos con un único elemento	$2, 3, 5, 7$.
Productos con dos únicos elementos	$2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 5 \cdot 7$.
Productos con tres únicos elementos	$2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7, 2 \cdot 5 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Productos con cuatro únicos elementos	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Por lo tanto, los divisores naturales del número 210 son:

$$1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105, 210,$$

y los divisores enteros del número 210 son:

$$-1, -2, -3, -5, -7, -6, -10, -14, -15, -21, -35, -30, -42, -70, -105, -210,$$
$$1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105, 210.$$

b) Se descompone a en factores primos,

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Elemento que no es factor	1 (72 es divisible por 1).
Productos con 1 factor	$2, 3$.
Productos con 2 factores	$2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3$.
Productos con 3 factores	$2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3$.
Productos con 4 factores	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \ 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
Productos con 5 factores	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

nueve filas sobra un soldado, que en formación de doce filas también sobra un soldado y que se pueden poner en formación de cinco.

Solución. Si N representa el menor número de soldados, entonces se tiene:

$$N - 1 \text{ es divisible por } 9 \quad \text{y} \quad N - 1 \text{ es divisible por } 12,$$

por lo tanto, N-1 es divisible por $\text{m.c.m}(9,12) = 36$. Existe un número $K \in \mathbf{N}$ tal que

$$N - 1 = 36 \cdot K,$$

o lo que es lo mismo,

$$N = 36 \cdot K + 1, \quad \text{con } K \in \mathbf{N}.$$

Son muchos los números que verifican estas dos condiciones (basta con dar valores naturales a K; K=1,2,3,4...).

K	1	2	3	4	5	6	...
N	37	73	109	145	181	217	...

Ahora bien, N debe ser divisible por cinco y ser el más pequeño posible. Luego, $N = 145$.

Problema 7

Ordenar de mayor a menor los siguientes números racionales.

a) $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{13}, \frac{2}{5}$ b) $0'666..., \frac{4}{5}, 0'32, \frac{7}{9}$

Solución.

a) Como se trata de números racionales expresados en forma de fracción de números enteros, entonces expresamos todos los números en fracciones tales que todas tengan el mismo denominador. (Para ello, determinamos el m.c.m.(4,9,13,5) y expresamos todas las fracciones con denominador m.c.m.(4,9,13,5)) $\text{m.c.m.}(4,9,13,5) = 4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5 = 2340$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{1755}{2340} \quad ; \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{1820}{2340};$$

$$\frac{9}{13} = \frac{9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{1620}{2340} \quad ; \quad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5} = \frac{936}{2340}.$$

Ahora basta ordenar los numeradores para determinar el orden,

$$\frac{2}{5} < \frac{9}{13} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9}.$$

b) El número 0'666... es un número racional pues tiene una expresión decimal periódica y el número 0'32 también lo es por tener una expresión decimal finita. Expresamos estos números en forma de fracción:

$0'6... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, (como es un número con parte entera nula y con parte entera periódica se escribe una fracción con el

periodo como numerador y tantos nueves en el denominador como elementos tiene el periodo).

$$0'32 = \frac{32}{100} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$ (como es un número decimal finito se escribe el número sin coma decimal partido por la potencia de 10 de exponente el número de decimales).

Así pues, debemos ordenar de mayor a menor los números

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \frac{7}{9},$$

para ello, reducimos las fracciones a igual denominador (m.c.m.(3,5,25,9)=25·9)

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 25}{25 \cdot 9} = \frac{150}{225} \quad ; \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 9 \cdot 5}{25 \cdot 9} = \frac{180}{225};$$

$$\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 9}{25 \cdot 9} = \frac{72}{225} \quad ; \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 25}{25 \cdot 9} = \frac{175}{225}.$$

Ahora basta ordenar los numeradores para determinar el orden,

$$0'32 < 0'6... < \frac{7}{9} < \frac{4}{5}$$

Problema 8

Encuéntrese la forma fraccionaria de los siguientes números racionales:

a) 0´387 b) -0´386386386... c) 1´323232...

d) 0´386767676... e) 0´2356666... f) -7´32121212...

Solución.

a) Este número decimal tiene parte decimal finita, así pues (se escribe el número sin coma decimal dividido por la potencia de 10 de exponente el número de cifras decimales)

$$0'387 = \frac{387}{1000}$$ (no se puede reducir esta expresión pues m.c.d(387,1000)=1).

b) Este número decimal es periodo puro, es decir no posee parte decimal no periódica.

$$-0'386386386... = -1 \cdot 0'386...$$

El número 0´386... se expresa en forma de fracción (con el número sin coma decimal en el numerador y un denominador constituido por un número de tantos nueves como elementos tiene el periodo),

$$0'386... = \frac{386}{999}$$ (no se puede reducir esta expresión pues m.c.d.(386.999) = 1).

Luego, $-0'386386... = -\frac{386}{999}$.

c) Este número decimal es periódico puro y posee parte entera no nula

$$1'323232... = 1 + 0'32... = 1 + \frac{32}{99} = \frac{99}{99} + \frac{32}{99} = \frac{131}{99}$$ (no se puede reducir).

(Obsérve que $1+\frac{32}{99}=\frac{99}{99}+\frac{32}{99}=\frac{100-1}{99}+\frac{32}{99}=\frac{100+32-1}{99}=\frac{132-1}{99}$ es decir, el numerador es el número sin coma decimal menos la parte no periódica mientras que el denominador es un número con tantos nueves como elementos tiene el periodo).

d) Este número tiene parte decimal periódica y parte decimal no periódica

$$0'38676767\ldots = 0'3867\ldots = \frac{38'67\ldots}{100} = \frac{\frac{3867-38}{99}}{100} = \frac{3867-38}{9900} = \frac{3829}{9900}.$$

Obsérvese que la penúltima fracción está constituida por: El numerador formado por un número entero obtenido al escribir el número sin coma y con un único periodo (cifras del segundo miembro) menos un número entero obtenido al escribir las cifras que no son del periodo. El denominador obtenido al escribir tantos nueves como elementos tiene el periodo seguidos de tantos ceros como elementos tiene la parte decimal no periódica.

e) Este número tiene parte decimal periódica y parte decimal no periódica

$$0'235666\ldots = 0'2356\ldots = \frac{2356-235}{9000} = \frac{2121}{9000} = \frac{707}{3000}.$$

f) Este número tiene parte entera, parte decimal periódica y parte decimal no periódica

$$-7'321212\ldots = -7'3212\ldots = -\frac{73212-732}{9900} = -\frac{72480}{9900} = -\frac{7248}{990} = -\frac{3624}{495}.$$

Problema 9

Determinar la fracción irreducible de los siguientes números

a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{7}{6}-(\frac{2}{4}+8)}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-2(\frac{3}{5}-\frac{3}{4})}{\frac{\frac{7}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}}$

Solución.

a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{7}{6}-(\frac{2}{4}+8)} = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{5}{24}}{\frac{7}{6}-\frac{17}{2}} =$ (pues $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{9}=\frac{15}{72}=\frac{5}{24}$ y $\frac{2}{4}+8=\frac{17}{2}$).

$= \dfrac{\frac{53}{24}}{-\frac{22}{3}} = \dfrac{53\cdot 3}{-22\cdot 24} = -\dfrac{53}{176}$ (pues $\frac{2}{3}+\frac{7}{4}-\frac{5}{24}=\frac{16}{24}+\frac{42}{24}-\frac{5}{24}=\frac{53}{24}$ y $\frac{7}{6}-\frac{17}{2}=\frac{7}{6}-\frac{51}{6}=-\frac{44}{6}=-\frac{22}{3}$)

b) $$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}-2\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)}{\frac{\frac{7}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}-2\left(-\frac{3}{20}\right)}{\frac{\frac{7}{5}-\frac{3}{8}}{-\frac{7}{12}}} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{10}}{\frac{\frac{41}{40}}{-\frac{7}{12}}} = \frac{\frac{29}{30}}{-\frac{123}{70}} = -\frac{203}{369}$$

Problema 10

Un anciano árabe decide repartir 19 camellos entre sus tres hijos de forma que el mayor obtenga la mitad de los camellos, el mediano una cuarta parte y el menor una quinta parte.

Ante el dilema de matar y despedazar algún camello, los hijos decidieron consultar a un sabio geómetra de la época. Este dictaminó lo siguiente: Deben darse 10 camellos al primogénito, 5 al mediano y 4 al benjamín.

Analícese este problema.

Solución.

Los deseos del anciano no pueden ser llevados a la práctica puesto que

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a \neq a \text{ , concretamente } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20} = \frac{19}{20}$$

Así pues, el sabio geómetra en lugar de considerar

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \text{ y } \frac{1}{5}, \text{ considero } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \text{ y } \frac{1}{20},$$

este último es el que le correspondía a él.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20} = 1$$

Esta distribución de camellos dada por el sabio era la forma más próxima a la repartición imposible y deseada por el anciano árabe. Así pues, el sabio aportó su camello formando un grupo de 20 camellos. Dividió por 2, por 4 y por 5, repartió los camellos y retiró el suyo.

TEMA 2

Números reales

Problema 1

Dado el número irracional $\pi = 3'14159265...$, se pide determinar una fracción de números enteros tal que la diferencia entre dicha fracción y el número irracional a sea menor que 10^{-3}, siendo a el siguiente número:

a) $a = 2\pi - 6$ b) $a = \frac{\pi}{2}$

Solución.

a) Conocidos los primeros decimales de π se tiene

$3 < \pi < 4$	Al multiplicar por 2 cada una de esta cadena de desigualdades, (el sentido de las desigualdades se mantiene).	$6 < 2\pi < 8$
$3'1 < \pi < 3'2$		$6'2 < 2\pi < 6'4$
$3'14 < \pi < 3'15$		$6'28 < 2\pi < 6'3$
$3'141 < \pi < 3'142$		$6'282 < 2\pi < 6'284$
$3'1415 < \pi < 3'1416$		$6'283 < 2\pi < 6'2832$
$3'14159 < \pi < 3'1416$		$6'28318 < 2\pi < 6'2832$
... ...		... ...

y al restarle 6 a cada miembro de las desigualdades se obtiene

$$0 < 2\pi - 6 < 2$$

$$0'2 < 2\pi - 6 < 0'4$$

$$0'28 < 2\pi - 6 < 0'3$$

$$0'28 < 2\pi - 6 < 0'284$$
$$0'283 < 2\pi - 6 < 0'2832$$
$$0'28318 < 2\pi - 6 < 0'2832$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

De la quinta línea de desigualdades, $0'283 < 2\pi - 6 < 0'2832$, se obtiene que

$$(2\pi - 6) - (0'283) < (0'2832) - (0'283) = 0'0002.$$

Ahora bien, $0'283$ es un número decimal finito y, por tanto, es un número racional. Así pues, se considera $0'283$ escrito como fracción de números enteros, $0'283 = \frac{283}{1000}$ como la fracción que se pide, pues ya se ha comprobado que

$$2\pi - 6 - \frac{283}{1000} < 0'0002 < 10^{-3} = 0'001.$$

b) Análogamente a lo realizado con el apartado anterior se tiene

$3 < \pi < 4$	Al dividir por 2 cada una de esta cadena de desigualdades	$1'5 < \frac{\pi}{2} < 2$
$3'1 < \pi < 3'2$		$1'55 < \frac{\pi}{2} < 1'6$
$3'14 < \pi < 3'15$		$1'57 < \frac{\pi}{2} < 1'575$
$3'141 < \pi < 3'142$		$1'5705 < \frac{\pi}{2} < 1'571$
$3'1415 < \pi < 3'1416$		$1'57075 < \frac{\pi}{2} < 1'5708$
$3'14159 < \pi < 3'1416$		
... ...		... ...

De la cuarta línea de desigualdades de la derecha, $1'5705 < \frac{\pi}{2} < 1'571$, se obtiene que

$$1'571 - \frac{\pi}{2} < 1'571 - 1'5705 = 0'0005 < 10^{-3} = 0'001.$$

Como $1'571$ es un número racional, se determina su expresión reducida en forma de fracción, $1'571 = \frac{1571}{1000}$. Así pues, $\frac{1571}{1000}$ es una fracción que verifica que

$$\left| \frac{1'571}{1000} - \frac{\pi}{2} \right| < 0'001.$$

Problema 2

Demuéstrese que si a y b son dos números reales, entonces

a) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$

Solución. Cabe distinguir cuatro posibles casos:

I) $a=-s$ y $b=-r$

II) $a=-s$ y $b=r$

III) $a=s$ y $b=-r$

IV) $a=s$ y $b=r$,

donde r y s son números reales no negativos. Como $|w| = |-w| = w$ para cualquier w número real no negativo, entonces

$$|a| = |-s| = |s| = s \quad \text{y} \quad |b| = |-r| = |r| = r .$$

Así pues, se verifica que

$$|a \cdot b| = |s \cdot r| = |(-s) \cdot r| = |s \cdot (-r)| = |(-s) \cdot (-r)| = s \cdot r = |a| \cdot |b|$$

Además, si $b \neq 0$, entonces $|b| \neq 0$ y se tiene

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|-\frac{s}{r}\right| = \left|\frac{s}{r}\right| = \frac{s}{r} = \frac{|a|}{|b|} .$$

Problema 3

Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{(3 \cdot a^3 \cdot b^4)^{-3} \cdot (4 \cdot a^2 \cdot b^{-2})^2}{6 \cdot \dfrac{a^2}{b^3}}$ b) $((0{,}001^{1/3})^{2/3})^{5/2}$

c) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{98}$

e) $\sqrt[3]{3 \cdot a^4 \cdot b^6} - \sqrt[3]{81 \cdot a^7 \cdot b^3} - 2\sqrt[3]{24 \cdot a \cdot b^9}$ f) $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96} - \frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$

Solución. Se aplican las propiedades de las potencias.

a) $\dfrac{(3 \cdot a^3 \cdot b^4)^{-3} \cdot (4 \cdot a^2 \cdot b^{-2})^2}{6 \cdot \dfrac{a^2}{b^3}} = \dfrac{3^{-3} \cdot a^{-9} \cdot b^{-12} \cdot 4^2 \cdot a^4 \cdot b^{-4}}{6 \cdot a^2 \cdot b^{-3}} =$

$$= \frac{3^{-3}\cdot a^{-5}\cdot b^{-16}\cdot 2^4}{2\cdot 3\cdot a^2\cdot b^{-3}} = \frac{2^3}{3^4\cdot a^7\cdot b^{13}}$$

b) $\left((0'001^{1/3})^{2/3}\right)^{5/2} = \left(\left((10^{-3})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{5/2} = \left((10^{-1})^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(10^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} =$

$$= 10^{\frac{-5}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{100}},$$

al racionalizar (quitar las raíces del denominador para lo cual multiplicamos numerador y denominador por $10^{\frac{1}{3}}$)

$$\frac{1}{10\sqrt[3]{100}} = \frac{1}{10\cdot 10^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{10^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{1}{3}}} = \frac{10^{\frac{1}{3}}}{100} = \frac{\sqrt[3]{10}}{100}.$$

c) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \left(2\left(2\,(2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} =$

$$= \left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}.$$

d) Descomponemos en factores primos los números 50, 18 y 98.

$$50 = 2\cdot 5^2 \quad ; \quad 18 = 2\cdot 3^2 \quad ; \quad 98 = 2\cdot 7^2.$$

Así pues,

$$\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{98} = \sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3^2}-\sqrt{2\cdot 7^2} = 5\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}-7\cdot\sqrt{2} =$$
$$= (5+3-7)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

e) Descomponemos los números 81 y 24 en factores primos.

$$81 = 3^4 \quad ; \quad 24 = 2^3\cdot 3.$$

$$\sqrt[3]{3a^4b^6}-\sqrt[3]{81a^7b^3}-2\sqrt[3]{24ab^9} = ab^2\cdot\sqrt[3]{3a}-3a^2b\cdot\sqrt[3]{3a}-2\,(2)\,b^3\cdot\sqrt[3]{3a} =$$
$$= (a\cdot b-3a^2-4b^2)\,b\cdot\sqrt[3]{3a}$$ (pues, inicialmente, se ha extraído de la raíz todo lo que se puede).

f) Descomponemos los números 96 y 189 en factores primos.

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad ; \quad 189 = 3^3 \cdot 7 .$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96} - \frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189} = 5 \cdot \sqrt{\frac{2^5 \cdot 3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{\frac{3^3 \cdot 7}{7}} = 5 \cdot \sqrt{2^4 \cdot 3} - (3 \cdot \sqrt{3^3}) =$$

$$= 5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

Problema 4

Racionalizar y simplificar los siguientes números:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{243}}$ c) $\dfrac{5}{1-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ f) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[5]{8}}$

Solución.

Se trata de reescribir estos números reales de forma que en el denominador no se escriba raíz alguna, para ello, se ha de multiplicar y dividir por un cierto número de forma que en el denominador desaparezca la raíz.

a) $$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} .$$

En este caso se multiplica numerador y denominador por 2 elevado a 1 - k donde k es la potencia a la que aparece elevado 2 en el denominador, $2^{1/2}$. Además, habitualmente se escribe

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) Se hace de forma análoga al caso anterior.

$$\frac{3}{\sqrt{243}} = \frac{3}{3^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

En este caso se multiplica por 3 elevado a 1 - k donde k es la potencia a la que aparece elevado 3 en el denominador, $3^{1/2}$.

c) Se multiplica y se divide por el binomio conjugado del denominador $1 - \sqrt{2}$, es decir, (el binomio con el signo cambiado), por $1 + \sqrt{2}$.

$$\frac{5}{1-\sqrt{2}} = \frac{5}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{5(1+\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5+5\sqrt{2}}{-1} = -5-5\sqrt{2}\ .$$

d) Este caso es análogo al anterior, se multiplica y se divide por $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-3}{-1} = 3-\sqrt{6}\ .$$

e) Se multiplica numerador y denominador por 3 elevado a 1-k donde k es la potencia a la que aparece elevado 3 en el denominador, $3^{2/3}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{3} = \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{2^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{4}{6}}}{3} = \frac{\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{81}}{3} = \frac{\sqrt[6]{648}}{3}$$

f) Se multiplica numerador y denominador por 2 elevado a 1 - k donde k es la potencia a la que aparece elevado 2 en el denominador, $2^{2/5}$.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{5}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{5}}}{2^{\frac{2}{5}}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt[5]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt{2}\cdot\sqrt[5]{4}}{2} = \frac{\sqrt[5]{4}+\sqrt[10]{2^9}}{2}$$

Problema 5

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(7x+2)\cdot 3+2x-7=0$ b) $(2x-3)\cdot 3-5x+2=7x+4$ c) $x^2+5x+4=0$

d) $3x^2-6x+3=0$ e) $3\cdot(5x+2)\cdot(3x-7)=0$ f) $x^4-13x^2+36=0$

Solución.

a) Esta ecuación polinómica es de primer grado (pues no aparece la x elevado a una potencia de exponente mayor que 1). Procedemos a transformar la ecuación hasta despejar x,

$$(7x+2)\cdot 3+2x-7=0 \Rightarrow 21x+6+2x-7=0 \Rightarrow 23x-1=0 \Rightarrow 23x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{23}$$

b) Esta ecuación es de primer grado.

$$(2x-3)\cdot 3-5x+2=7x+4 \Rightarrow 6x-9-5x+2=7x+4 \Rightarrow x-7=7x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7-4=7x-x \Rightarrow 6x=-11 \Rightarrow x=-\frac{11}{6}\ .$$

c) Esta ecuación es de segundo grado (puesto que la mayor potencia de x que aparece es x al cuadrado) y para resolverla se estudia el discriminante. *El discriminante de la ecuación* $Ax^2+Bx+C=0$ *es* B^2-4AC. *Además, si* $B^2-4AC\geq 0$ *, entonces existen soluciones reales que son:*

$$x_1 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad y \quad x_2 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

En este caso se tiene $B^2-4AC = 5^2-4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9$ y

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2} = -4 \quad ; \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2} = -1.$$

La ecuación se puede escribir de la forma $(x+4)(x+1)=0$.

d) Esta ecuación es de segundo grado y aplicamos la fórmula una vez conocido el discriminante de la ecuación. Como $B^2-4AC = (-6)^2-4\cdot 3\cdot 3 = 36-36 = 0$, las soluciones son $x_1 = \frac{6+\sqrt{0}}{6} = 1$ y $x_2 = \frac{6+\sqrt{0}}{6} = 1$.

Las soluciones de la ecuación coinciden, además, la ecuación puede ser reescrita como $3\cdot(x-1)\cdot(x-1)=0$ o, lo que es lo mismo, $3\cdot(x-1)^2 = 0$.

e) Aunque esta ecuación es de segundo grado (basta multiplicar los dos factores para observarlo) no es necesario utilizar la fórmula para resolverla. Al aplicar las propiedades de los números reales (para que $a\cdot b=0$ debe ocurrir que $a=0$ ó $b=0$) se tiene que alguno de los dos factores debe ser nulo. Por tanto,

$$3\cdot(5x+2)\cdot(3x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} 5x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2}{5} \\ \text{o} \\ 3x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

Luego, las soluciones son $x_1 = -\frac{2}{5}, x_2 = \frac{7}{3}$.

f) Esta ecuación es una ecuación polinómica bicuadrada (pues aparecen únicamente potencias 4 y 2 de x). Para resolver esta ecuación se utiliza el algoritmo de la ecuación de segundo grado. Se considera que la incógnita es x^2 en lugar de x, es decir, se toma $t = x^2$. De esta forma la ecuación $x^4-13x^2+36 = 0$ se reescribe como $t^2-13t+36 = 0$.

En este caso se tiene

$$B^2-4AC = 13^2-4\cdot 36 = 25 \quad y \quad t_1 = 4 \; ; \; t_2 = 9.$$

De la igualdad $t = x^2$ se obtienen otras dos nuevas ecuaciones:

$$x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \\ x=2 \end{cases} \quad y \quad x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \\ x=3 \end{cases}.$$

Luego, las soluciones son $x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 2$ y $x_4 = 3$.

Las ecuaciones de primer grado poseen una única solución real. Las de segundo grado o no tienen solución real o poseen dos, aunque puede ocurrir que las dos soluciones sean iguales, (en este caso se dice que se repite dos veces).

Problema 6

Resuélvanse las inecuaciones lineales siguientes:

a) $\dfrac{3x+3}{5} < \dfrac{2x-8}{10}$ b) $\dfrac{1}{4}\cdot(2x-7) \geq 3x+10$

Solución.

a) Esta inecuación es de primer grado y para resolverla se procede de forma análoga a como se resuelve una ecuación de primer grado, es decir, se despeja x.

$$\frac{3x+3}{5} < \frac{2x-8}{10} \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{3}{5} < \frac{2}{10}x-\frac{8}{10} \Rightarrow \frac{3}{5}x+\frac{3}{5} < \frac{1}{5}x-\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{3}{5}x-\frac{1}{5}x < \frac{-4}{5}-\frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}x < \frac{-7}{5} \Rightarrow 2x < -7 \Rightarrow x < \frac{-7}{2}.$$

La inecuación se verifica para cualquier número de $(-\infty, -\dfrac{7}{2})$

b) Se procede de forma análoga al anterior apartado.

$$\frac{1}{4}\cdot(2x-7) \geq 3x+10 \Rightarrow \frac{2}{4}x-\frac{7}{4} \geq 3x+10 \Rightarrow \frac{-7}{4}-10 \geq 3x-\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{-47}{4} \geq \frac{5}{2}x$$

$$\frac{-47}{4} \geq \frac{10}{4}x \Rightarrow \frac{-47}{10} \geq x$$

La inecuación se verifica para cualquier número de $(-\infty, \dfrac{-47}{10}]$.

Problema 7

Si se toma como $\log_{10}2$ el número 0´301030 y como $\log_{10}3$ el número 0´477121 y como $\log_{10}7$ el número 0´845098. Determinar el valor de los siguientes números reales:

a) $\log_{10}5$ b) $\log_{10}24$ c) $\log_{10}\dfrac{36}{125}$

d) $\log_{10}0'00012$ e) $\log_{10}56000$ f) $\log_{10}\sqrt{1500}$

Solución.

a) Se escribe el numero 5 como una expresión en la cual sólo aparecen números de los cuales se conoce el logaritmo.

$$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10}10 - \log_{10}2 = 1 - 0'301030 = 0'69897$$

(en este caso se aplica la propiedad $\log_a\dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$).

b) Al descomponer el número 24 en factores primos se tiene:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \rightarrow \log_{10}24 = \log_{10}(2^3 \cdot 3) = \log_{10}2^3 + \log_{10}3 =$$

$$= 3\log_{10}2 + \log_{10}3 = 3 \cdot 0'301030 + 0'477121 = 1'380211 .$$

(en este caso se aplican las propiedades $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$ y $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$).

c) Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\log_{10}\frac{36}{125} = \log_{10}36 - \log_{10}125 = \log_{10}(2^2 \cdot 3^2) - \log_{10}5^3 =$$

$$= \log_{10}2^2 + \log_{10}3^2 - 3\log_{10}5 = 2\log_{10}2 + 2\log_{10}3 - 3\log_{10}5 =$$

$$= 2 \cdot 0'301030 + 2 \cdot 0'477121 - 3 \cdot 0'69897 = -0'540608 .$$

d) Al escribir como cociente y aplicar las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\log_{10}0'00012 = \log_{10}\frac{12}{10^5} = \log_{10}12 - \log_{10}10^5 =$$

$$= \log_{10}(3 \cdot 2^2) - 5\log_{10}10 = \log_{10}3 + 2\log_{10}2 - 5 = -3'920819 .$$

e) En este caso, $\log_{10}56000 = \log_{10}(56 \cdot 10^3) = \log_{10}(2^3 \cdot 7) + \log_{10}10^3 =$

$$= 3\log_{10}2 + \log_{10}7 + 3\log_{10}10 = 3 \cdot 0'301030 + 0'845098 + 3 = 4'748188 .$$

f) Análogamente, $\log_{10}\sqrt{1500} = \log_{10}(1500)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{10}1500 = \frac{1}{2}\log_{10}\frac{3000}{2} =$

$$= \frac{1}{2}(\log_{10}(3 \cdot 10^3) - \log_{10}2) = \frac{1}{2}(\log_{10}3 + \log_{10}10^3 - \log_{10}2) =$$

$$= \frac{1}{2}(3 + \log_{10}3 - \log_{10}2) = \frac{1}{2}(3 + 0'477121 - 0'301030) = 1'588045 .$$

Problema 8

Determinar el valor de x en las siguientes igualdades de números reales:

a) $\log_{0'25}8 = x$ b) $\log_2 5 = x$

Solución.

a) Al aplicar la definición de logaritmo ($A = \log_C B \Leftrightarrow C^A = B$) se tiene:

$$\log_{0'25}8 = x \Leftrightarrow 0'25^x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 8 \Leftrightarrow (2^{-2})^x = 2^3 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^3 ,$$

luego, $$-2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} .$$

b) Al aplicar la definición de logaritmo se tiene:

$$\log_2 5 = x \Leftrightarrow 2^x = 5,$$

y como 5 no es potencia de 2, entonces se toman logaritmos decimales en la última igualdad.

$$\log_{10} 2^x = \log_{10} 5 \Leftrightarrow x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2},$$

y basta utilizar una calculadora científica para obtener un valor aproximado de x, por ejemplo, $x = 2'32192809489$.

Problema 9

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

a) $2\log_{10}(3x) = \log_{10}(-6x-1)$ b) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

c) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} = -36$ d) $\log_{10}(7x-9) + \log_{10}(3x-4) = 1$

Solución.

a) En esta ecuación existen dos expresiones logaritmo y ninguna de ellas se puede transformar en la otra o en otra expresión logaritmo común. En este caso se transforma la igualdad en otra con un logaritmo en cada miembro de la igualdad.

$2\log_{10} 3x = \log_{10}(-6x-1)$ (como $\log_a M^n = n\log_a M$) $\log_{10}(3x)^2 = \log_{10}(-6x-1)$

Como el logaritmo de un número es único y no existen dos números con el mismo logaritmo, entonces

$$(3x)^2 = -6x - 1 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{3} \\ \text{o} \\ x = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

Luego, $x = \frac{-1}{3}$ es el único valor candidato para ser solución de la ecuación logarítmica. Para ser solución debe verificar la ecuación

$$2\log_{10}\left(3\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \log_{10}\left((-6)\left(\frac{-1}{3}\right) - 1\right) \Rightarrow 2\log_{10}(-1) = \log_{10}(1).$$

En la segunda igualdad aparece un error pues no está definido el logaritmo de -1. Esto se debe al supuesto de que el valor candidato verificaría la ecuación.

Como el único valor posible era $x = \frac{-1}{3}$, y éste no verifica la ecuación logarítmica, entonces dicha ecuación no posee solución.

b) En esta ecuación aparecen tres expresiones exponenciales de igual base, por ello procedemos a transformar la ecuación de forma que tan sólo aparezca una única expresión exponencial.

$$3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=117 \Rightarrow \frac{3^x}{3}+3^x+3\cdot 3^x=117 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}+1+3\right)3^x=117$$

$3^x=27 \Rightarrow 3^x=3^3$ y, por lo tanto, $x=3$.

c) En esta ecuación aparecen dos expresiones exponenciales con distinta base, si bien una base es el cuadrado de la otra. En este caso procedemos a transformar la ecuación de forma que tan sólo aparezca una única expresión exponencial.

$$4^x-3\cdot 2^{x+2}=-36 \Rightarrow (2^2)^x-3\cdot 2^2 2^x=-36 \Rightarrow 2^{2x}-12\cdot 2^x=-36$$

$$(2^x)^2-12\cdot 2^x+36=0.$$

Una vez expresada la ecuación respecto a una única expresión exponencial se puede sustituir dicha expresión exponencial por otra incógnita, por ejemplo, $T=2^x$. Ahora la expresión de la ecuación es

$$T^2-12T+36=0,$$

cuyas soluciones son:

$$T=\frac{12-\sqrt{12^2-(4\cdot 36)}}{2}=6 \qquad \text{y} \qquad T=\frac{12+\sqrt{12^2-(4\cdot 36)}}{2}=6$$

Si $T=6$, entonces, $2^x=6$.

El número 6 no es ninguna potencia del número 2, eso quiere decir que x no es un número entero. Para determinar el valor de x tomamos logaritmos decimales en cada miembro de la última igualdad.

$$\log_{10}2^x=\log_{10}6 \Rightarrow x\cdot\log_{10}2=\log_{10}6 \Rightarrow x=\frac{\log_{10}6}{\log_{10}2}$$

Al hacer uso de una calculadora científica se puede obtener un valor aproximado de x, por ejemplo, $x\approx 2'584962$.

d) En esta ecuación existen dos expresiones logaritmo que no podemos descomponerlas en expresiones logaritmos, por ello, las agrupamos en una única expresión logaritmo.

$$\log_{10}(7x-9)+\log_{10}(3x-4)=1 \Rightarrow \log_{10}((7x-9)(3x-4))=1$$

(pues $\log_a(N\cdot M)=\log_a N+\log_a M$).

Al aplicar la definición de logaritmo ($A=\log_C B \Leftrightarrow C^A=B$)

$$10^1=(7x-9)(3x-4) \Leftrightarrow 21x^2-55x+26=0,$$

y las soluciones de la ecuación de segundo grado son:

$$x=\frac{55-\sqrt{55^2-4\cdot 21\cdot 26}}{42}=\frac{13}{21} \quad ; \quad x=\frac{55+\sqrt{55^2-4\cdot 21\cdot 26}}{42}=2 \ .$$

Estos valores son los únicos candidatos para ser solución de la ecuación logarítmica. Para determinar si son, o no, soluciones se comprueba si verifican la ecuación logarítmica.

Para $x = 2$ se tiene:

$$\log_{10}(14-9) + \log_{10}(6-4) = 1 \Leftrightarrow \log_{10}5 + \log_{10}2 = 1 \Leftrightarrow \log_{10}(5\cdot 2) = 1,$$

que es correcto. Luego, $x = 2$ es una solución de la ecuación logarítmica.

Para $x = \frac{13}{21}$ se tiene:

$$\log_{10}(\frac{13}{3}-9) + \log_{10}(\frac{13}{7}-4) = 1 \Leftrightarrow \log_{10}(-\frac{14}{3}) + \log_{10}(-\frac{15}{7}) = 1,$$

que no es correcto (pues no existe el logaritmo de números negativos) y, por tanto, $x = \frac{13}{21}$ no es una solución de la ecuación logarítmica.

Problema 10

Comprobar las siguientes igualdades:

a) $\log(a^2-b^2) = \log ab + \log(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})$

b) $\log(a+b) + \log(\frac{a}{b}-1) = \log(\frac{a}{b}+1) + \log(a-b)$.

Solución.

a) Transformamos las expresiones logarítmicas del segundo miembro:

$$\log ab + \log(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}) = \log\left[ab(\frac{a}{b}-\frac{b}{a})\right] =$$

$$= \log\left[ab(\frac{a^2-b^2}{ba})\right] = \log(a^2-b^2).$$

b) Vamos a desarrollar el primer miembro hasta obtener el segundo:

$$\log(a+b) + \log(\frac{a}{b}-1) = \log\left[(a+b)(\frac{a}{b}-1)\right] =$$

$$= \log\left[(a+b)(\frac{a-b}{b})\right] = \log\left[(\frac{a+b}{b})(a-b)\right] =$$

$$= \log\left[(\frac{a}{b}+1)(a-b)\right] = \log(\frac{a}{b}+1) + \log(a-b).$$

TEMA 3

Elementos de la teoría de conjuntos

Problema 1

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son no vacíos? En aquellos casos en que no lo sean, ¿cuál es su cardinal y el de su conjunto de partes?

$A = \{x|\ x \text{ es un número natural}, 2x + 3 = 1\}$, $B = \{x|\ x \text{ es un número entero}, 5x + 3 = 12\}$

$$C = \{x|\ x \text{ es un número entero}, x^2 + 1 < 77\}$$

Solución. El conjunto A es vacío, puesto que no existe número natural alguno que verifique la ecuación $2x + 3 = 1$. (si $x \in \mathbf{N}$ entonces $x \geq 1$, luego $2x \geq 2 > 1$ y, por tanto, $2x + 3 \geq 2 + 3 > 1$).

El conjunto B es vacío igualmente, puesto que no existe número entero alguno que verifique la ecuación $5x + 3 = 12$. ($5x + 3 = 12 \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$)

El conjunto C es no vacío puesto que la inecuación $x^2 + 1 < 77$ posee soluciones enteras. Para ver esto resolvemos la inecuación:

$$x^2 + 1 < 77 \Rightarrow x^2 < 76 \Rightarrow -\sqrt{76} < x < \sqrt{76},$$

ahora bien, los únicos números enteros que verifican ser mayores que $-\sqrt{76}$ y menores que $\sqrt{76}$ son -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Así pues,

$$A = \{-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

y $|A| = 17$. Además, $|P(A)| = 2^{17} = 131072$.

Problema 2

Dados los siguientes pares de conjuntos, estudiar si ambos conjuntos son iguales.

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ |x| \leq 5\}$ b) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x+7 > 10\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ x^2+1 < 36\}$ $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z},\ |x| > 3\}$

Solución.

a) Para comprobar que $A = B$ estudiaremos que se verifican las siguientes inclusiones $A \subset B$ y $B \subset A$. Veamos que $A \subset B$, para ello se comprueba que todo elemento de A, $x \in A$, es un elemento de B, $x \in B$.

Sea $x \in A$, entonces x es un número entero comprendido entre -5 y 5.

$$-5 \leq x \leq 5 \Rightarrow x^2 \leq 5^2 \Rightarrow x^2+1 \leq 25+1 = 26 \Rightarrow x^2+1 < 36, \text{ luego, } x \in B.$$

Veamos ahora que $B \subset A$, para ello se comprueba que todo elemento de B, $x \in B$, es un elemento de A, $x \in A$.

Sea $x \in B$, entonces x es un número entero tal que $x^2+1 < 36$, y por lo tanto:

$$x^2 < 35 \Rightarrow -\sqrt{35} < x < \sqrt{35}.$$

Los únicos números enteros comprendidos entre $-\sqrt{35}$ y $\sqrt{35}$ son -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Luego, $|x| \leq 5$ y, por lo tanto, $x \in A$.

b) Los conjuntos A y B no son iguales puesto que $B \not\subset A$, aunque si es cierto que $A \subset B$. Veamos que $B \not\subset A$.

Para comprobar que $B \not\subset A$ basta encontrar un elemento de B, $x \in B$ tal que $x \notin A$, no está en A. Por ejemplo, $-7 \in B$, sin embargo, $-7 \notin A$.

Problema 3

Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ el conjunto universal y $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{2,3,7,8\}$ y $C = \{4,5,6,7,8\}$ tres subconjuntos de U. Calcúlese:

a) $(A \cup B)^c \cap C$ b) $(A - B) \cap C^c$

c) $(A - B)^c \cup (B - C)^c$ d) $(B \cup C) \cap (A \cap B)^c$

Solución.

a) $A \cup B = \{1,2,3,5,7,8\}$ ($T \cup Q$ está formado por los elementos de un conjunto o del otro; es decir, $x \in T \cup Q$ si $x \in T$ ó si $x \in Q$).

$(A \cup B)^c = \{4,6,9\}$ (T^c está formado por los elementos de U que no están en T, es decir, $x \in T^c$ si $x \notin T$).

$(A \cup B)^c \cap C = \{4,6\}$ ($T \cap Q$ está formado por los elementos que están en T y en Q, es decir, $x \in T \cap Q$ si $x \in T$ y $x \in Q$).

b) $A - B = \{1,5\}$ (T-Q está formado por los elementos del conjunto T que no están en el conjunto Q, es decir, $x \in T - Q$ si $x \in T$ y $x \notin Q$).

$C^c = \{1,2,3,9\}$,

$(A - B) \cap C^c = \{1\}$.

c) $A - B = \{1,5\} \Rightarrow (A-B)^c = \{2,3,4,6,7,8,9\}$,

$B - C = \{2,3\} \Rightarrow (B-C)^c = \{1,4,5,6,7,8,9\}$,

$(A-B)^c \cup (B-C)^c = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$

d) $B \cup C = \{2,3,4,5,6,7,8\}$,

$A \cap B = \{2,3\} \Rightarrow (A \cap B)^c = \{1,4,5,6,7,8,9\}$,

$(B \cup C) \cap (A \cap B)^c = \{4,5,6,7,8\}$.

Problema 4

Sean U un conjunto cualquiera y A y B dos subconjuntos de U. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $(A^c)^c = A$ b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ d) $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$

Solución.

a) Veamos que $(A^c)^c \subset A$; $x \in (A^c)^c \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in A$.

Veamos que $A \subset (A^c)^c$; $x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in (A^c)^c$.

Como $(A^c)^c \subset A$ y $A \subset (A^c)^c$, entonces $(A^c)^c = A$.

b) Veamos que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$;

$$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \Rightarrow x \in A^c \\ \quad\quad y \\ x \notin B \Rightarrow x \in B^c \end{cases} \Rightarrow x \in A^c \cap B^c.$$

Veamos que $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$;

$$x \in A^c \cap B^c \Rightarrow \begin{cases} x \in A^c \Rightarrow x \notin A \\ \quad y \quad\quad\quad y \\ x \in B^c \Rightarrow x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c.$$

Así pues, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

c) Veamos que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$;

$$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ \quad o \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ \quad o \\ x \in B^c \end{cases} \Rightarrow x \in A^c \cup B^c.$$

Veamos que $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$

$$x \in A^c \cup B^c \Rightarrow \begin{cases} x \in A^c \\ o \\ x \in B^c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \notin A \\ o \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c.$$

d) $(A^c \cup B^c)^c = ((A \cap B)^c)^c = A \cap B$ al aplicar sucesivamente las igualdades demostradas en los apartados c) y a) respectivamente.

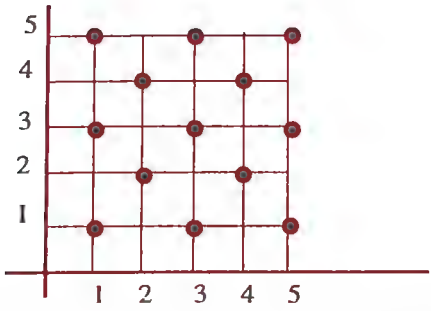
Problema 5

Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $C=\{(x,y)| x \in A, y \in A, x+y$ es un número par$\}$, dibujar el conjunto C como subconjunto de A×A. ¿Se puede asegurar que la terna {C, A, A} es una aplicación?

Solución. Para que $x + y$ sea un número "par" debe darse alguna de las siguientes situaciones:

- x e y son números impares.
- x e y son números pares.

Así pues, $C = \{(x,y) \in A \times A|$ x e y impares ó x e y pares $\}$.



No se trata de una aplicación pues si bien todos los elementos de A (primera coordenada) forman un par con algún elemento de A (segunda coordenada), ocurre que existen más de un par con idéntica primera coordenada. Por ejemplo, $(1, 1) \in C$; $(1, 3) \in C$ y $(1, 5) \in C$.

Problema 6

Sea f: **R**→**R** tal que $f(x) = 2x^2 + 1$. Determínese f(A) para cada uno de los siguientes

subconjuntos A de **R**.

a) $A = \{-3, -1, 0, 2, 5, \sqrt{16}\}$ b) $A = (-2,3)$

c) $A = (-4, 7\,]$ d) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 7\}$

Solución.

a) Se define el conjunto f(A) de la forma siguiente:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{f(-3), f(-1), f(0), f(2), f(5), f(\sqrt{16})\}.$$

Como la imagen de un número se obtiene al sustituir en la expresión $f(x) = 2x^2 + 1$ la letra x por dicho número, se tiene:

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 1 = 19 \quad , \quad f(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3,$$

y, análogamente, $f(0) = 1$; $f(2) = 9$; $f(5) = 51$ y $f(\sqrt{16}) = 33$.

Luego, $f(A) = \{1, 3, 9, 19, 33, 51\}$.

b) El conjunto A se puede expresar de la forma: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \text{ y } x < 3\}$ o como $A = (-2, 0) \cup [0, 3)$.

Si $-2 < x < 0$ entonces $0 < -x < 2$ y

$$0 < (-x)^2 < 2^2 \Rightarrow 0 < x^2 < 4 \Rightarrow 0 < 2x^2 < 8 \Rightarrow 1 < 2x^2 + 1 < 9.$$

Si $0 \le x < 3 \Rightarrow 0 \le x^2 < 9 \Rightarrow 0 \le 2x^2 < 18 \Rightarrow 1 \le 2x^2 + 1 < 19$.

Así pues,

para $-2 < x < 0$ se tiene $1 < f(x) < 9$, es decir, $f(x) \in (1,9)$,

para $0 \le x < 3$ se tiene $1 \le f(x) < 19$, es decir, $f(x) \in [1, 19)$.

Por tanto, $f(A) \subset \{y \in \mathbf{R} \mid 1 \le y < 19\} = [1, 19)$ (puesto que $(1,9) \subset [1, 19)$). Para ver que, $f(A) = [1, 19)$ comprobamos que para cualquier $y \in [1, 19)$ existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Rightarrow 2x^2 + 1 = y \Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow 0 \le x \le 3.$$

c) El conjunto A se expresa de la forma: $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x \le 7\}$.

Si $-4 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 4 \Rightarrow 0 < x^2 < 16 \Rightarrow 0 < 2x^2 < 32 \Rightarrow 1 < 2x^2 + 1 < 33$.

Si $0 \le x \le 7 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 49 \Rightarrow 0 \le 2x^2 \le 98 \Rightarrow 1 \le 2x^2 + 1 \le 99$.

Así pues,

para $-4 < x < 0$ se tiene $1 < f(x) < 33$, es decir, $f(x) \in (1,33)$,

para $0 \le x \le 7$ se tiene $1 \le f(x) \le 99$, es decir, $f(x) \in [1,99]$.

Por lo tanto, $f(A) \subset [1, 99]$ (puesto que $(1,33) \subset [1,99]$). Para ver que, $f(A) = [1,99]$ comprobamos que para cualquier $y \in [1, 99]$ existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$f(x)=y \Rightarrow 2x^2+1=y \Rightarrow 2x^2=y-1 \Rightarrow x^2=\frac{y-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow 0\le x\le 7.$$

d) Si $7<x \Rightarrow 49<x^2 \Rightarrow 98<2x^2 \Rightarrow 99<2x^2+1$.

Luego, $f(A)\subset\{x\in \mathbf{R}/\ 99<y\}=(99,\infty)$. Para ver que, $f(A)=(99,\infty)$ comprobamos que para cualquier $y\in(99,\infty)$ existe algún $x\in A$ tal que $f(x)=y$.

$$f(x)=y \Rightarrow 2x^2+1=y \Rightarrow 2x^2=y-1 \Rightarrow x^2=\frac{y-1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow 7<x.$$

Problema 7

Dados los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b,c,d\}$, se pide:

a) Determinar todas las aplicaciones inyectivas que se puedan definir de A en B.

b) Determinar todas las aplicaciones sobreyectivas que se puedan definir de A en B.

Solución.

a) Una aplicación es inyectiva si un mismo elemento de B no puede ser imagen de dos elementos distintos de A. Así pues, el problema consiste en determinar una terna de letras sin repetición para hacerlas corresponder con 1, 2 y 3 respectivamente.

f(1)	f(2)	f(3)	f(1)	f(2)	f(3)
a	b	c	c	a	b
a	b	d	c	a	d
a	c	b	c	b	a
a	c	d	c	b	d
a	d	b	c	d	a
a	d	c	c	d	b
b	a	c	d	a	b
b	a	d	d	a	c
b	c	a	d	b	a
b	c	d	d	b	c
b	d	a	d	c	a
b	d	c	d	c	b

b) No existe una aplicación sobreyectiva de A en B puesto que la imagen de cualquier aplicación tiene cardinal menor o igual que tres, $|f(A)| \leq 3$, mientras que $|B| = 4$.

Problema 8

Estudiar cuales de las siguientes aplicaciones son inyectivas.

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = 3x + 1$ b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^2$

c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = 3x^3 + 1$ d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Solución. Para estudiar si la aplicación f es inyectiva se debe comprobar que no hay dos elementos distintos que les corresponda la misma imagen, es decir, si existen dos elementos x e y tales que $f(x) = f(y)$, entonces debe verificarse que $x = y$.

a) Veamos que f es una aplicación inyectiva. Supuesto que existen dos números reales x e y tales que $f(x) = f(y)$, es decir, $f(x) = 3x + 1 = 3y + 1 = f(y) \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$.

b) Supuesto que $f(x) = x^2 = y^2 = f(y)$, entonces se verifica alguna de las siguientes igualdades, $-x = y$ o $x = y$.

Por lo tanto, para cualquier número no nulo $\alpha \in \mathbf{R}$ se tiene que $\alpha \neq -\alpha$ y sin embargo $f(\alpha) = f(-\alpha)$, luego la aplicación f no es inyectiva.

c) Supuesto que $f(x) = f(y)$,

$$f(x) = 3x^3 + 1 = 3y^3 + 1 = f(y) \Rightarrow 3x^3 = 3y^3 \Rightarrow x^3 = y^3,$$

y al extraer la raíz cúbica se tiene $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y^3} \Rightarrow x = y$ (la raíz de un número real es un número real).

Luego f es una aplicación inyectiva.

d) Supuesto que $f(x) = f(y)$,

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4 = f(y) \Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2.$$

Si se verifica alguna de las siguientes igualdades

$$-(x-2) = (y-2) \quad \text{o} \quad (x-2) = (y-2),$$

entonces se cumple la igualdad $(x-2)^2 = (y-2)^2$. Así pues,

$$(x-2)^2 = (y-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = y-2 \\ \text{o} \\ -(x-2) = y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{o} \\ x = -y+4 \end{cases}.$$

Por lo tanto, para cualquier número $\alpha \in \mathbf{R}$, distinto de 4, se tiene que $\alpha \neq -\alpha + 4$ y sin embargo $f(\alpha) = f(-\alpha + 4)$, luego la aplicación f no es inyectiva.

Problema 9

Sean $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dos aplicaciones definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3x + 5$.

Estúdiese si estas aplicaciones son biyectivas y calcúlese las expresiones de $g\circ f(x)$, $f\circ g(x)$, $g\circ g(x)$ y $g\circ f\circ g(x)$.

Solución. Inicialmente se estudia si la aplicación f es inyectiva. Supuesto que se verifica que $f(x) = f(y)$, entonces se tiene

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2+1 = y^2+1 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ o \\ x = -y \end{cases}.$$

Como para cualquier número $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ se tiene que $\alpha \neq -\alpha$ y sin embargo $f(\alpha) = f(-\alpha)$ (pues $f(a) = a^2+1 = (-a)^2+1 = f(-a)$), luego la aplicación f no es inyectiva. Al no ser inyectiva, entonces tampoco es biyectiva (una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez).

Análogamente se procede con la aplicación g y se comprueba que es inyectiva.

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 3x+5 = 3y+5 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y,$$

Se estudia a continuación si la función g es sobreyectiva (cualquier número real debe ser imagen de algún número real). Sea $\alpha \in \mathbf{R}$, si α es la imagen de un número real x, $g(x) = \alpha$, entonces se tiene

$$g(x) = \alpha \Rightarrow 3x+5 = \alpha \Rightarrow 3x = \alpha - 5 \Rightarrow x = \frac{\alpha - 5}{3}.$$

Para cualquier número $\alpha \in \mathbf{R}$ resulta que éste es imagen del número $\frac{\alpha - 5}{3}$, luego la aplicación es sobreyectiva. Además, al ser g una aplicación inyectiva y sobreyectiva, entonces g es una aplicación biyectiva.

$g\circ f(x) = g(f(x)) = 3f(x)+5 = 3(x^2+1)+5 = 3x^2+8.$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2+1 = (3x+5)^2+1 = 9x^2+30x+26.$

$g\circ g(x) = g(g(x)) = 3g(x)+5 = 3(3x+5)+5 = 9x+20.$

$g\circ f\circ g(x) = g(f\circ g(x)) = g(f(g(x))) = 3f(g(x))+5 = 3(g(x)^2+1)+5 = 3((3x+5)^2+1)+5 = 27x^2+90x+83.$

Problema 10

Dada una aplicación f: A→B donde A y B son subconjuntos de **R**, se pide determinar una aplicación g: B→A tal que $g\circ f$ es igual a la aplicación identidad. Además, determinar los conjuntos A y B más grandes posibles donde f se puede definir con alguna de las siguientes expresiones:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Solución.

a) La aplicación f está definida sobre todo **R**, es decir, A = **R**, pues para cualquier número

real $\alpha \in \mathbf{R}$ se tiene que $\frac{1}{2}\alpha - 2 \in \mathbf{R}$, tambien B = **R**. Además, es una aplicación biyectiva puesto que:

- es inyectiva; $f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha - 2 = \frac{1}{2}\beta - 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta \Rightarrow \alpha = \beta$,
- es sobreyectiva; si $t \in \mathbf{R}$, $f(x) = t \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = t \Rightarrow \frac{1}{2}x = t + 2 \Rightarrow x = 2t + 4$.

Como esta aplicación es biyectiva, entonces posee aplicación inversa, f^{-1}. La aplicación f le hace corresponder a cada número $x \in \mathbf{R}$ otro número $y \in \mathbf{R}$, $y = f(x)$, es decir, $y = \frac{1}{2}x - 2$. Así pues, la aplicación inversa f^{-1} le debe hacer corresponder al número y el número x, es decir $x = f^{-1}(y)$.

Veamos como se expresa la aplicación f^{-1}. Si en la expresión $y = \frac{1}{2}x - 2$ despejamos la x en función de la y, entonces se obtiene la expresión de la aplicación f^{-1}.

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = y \Rightarrow \frac{1}{2}x = y + 2 \Rightarrow x = 2y + 4,$$

así pues, $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f^{-1}(t) = 2t + 4$.

Se puede considerar $g = f^{-1}$ y se comprueba que $g \circ f = Id_R$ ($Id_R(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$),

$$g \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = 2f(x) + 4 = 2\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 4 = x.$$

b) La aplicación f está definida sobre todo **R**, A = **R**, puesto que para cada número $\alpha \in \mathbf{R}$ (α^2 es otro número de **R**), $2\alpha^2 - 1$ es otro número de **R**. La aplicación no es inyectiva, por tanto, tampoco es biyectiva puesto que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^2 + 1 = 2y^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{o} \\ x = -y \end{cases}.$$

Las imágenes, por f, de los elementos de **R** constituyen el conjunto

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\} = [-1, \infty),$$

puesto que,

$$x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 \geq -1.$$

Procedemos de forma análoga a como se hace en el apartado a)

$$y = 2x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} \\ \text{o} \\ x = \sqrt{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Si se considera la aplicación $g: [-1,\infty) \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{\frac{t+1}{2}}$, se tiene que

$$g \circ f: [-1,\infty) \to \mathbf{R} \to \mathbf{R}\ ;\ g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{f(x)+1}{2}} = \sqrt{\frac{(2x^2-1)+1}{2}} = x.$$

La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no es inversible puesto que no es inyectiva (obsérvese que $g \circ f$ es la identidad de $[-1,\infty)$ pero no la identidad de $\mathbf{R}$). Cabe observar que $f \circ g(-3)$ no existe pues

$$f \circ g(-3) = f(g(-3)) = 2(g(-3))^2 - 1 = 2\left(\sqrt{\frac{-3+1}{2}}\right)^2 - 1 = 2\left(\sqrt{-1}\right)^2 - 1 \text{ no tiene}$$

sentido al no ser $\sqrt{-1}$ un número real.

c) La aplicación está definida para todos los números reales que no anulen al denominador (puesto que no tiene sentido dividir por cero), es decir, $A = \mathbf{R} - \{2\}$.

$$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = 3x+1 \Rightarrow xy - 2y = 3x+1 \Rightarrow xy - 3x = 2y+1$$

$$\Rightarrow x(y-3) = 2y+1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-3}.$$

Definimos $g: B \to A\ ;\ g(t) = \frac{2t+1}{t-3}$, y evidentemente esta expresión no tiene sentido para $t = 3$, luego $B = \mathbf{R} - \{3\}$. Se tiene pues,

$$f: \mathbf{R}-\{2\} \to \mathbf{R}-\{3\} \qquad g: \mathbf{R}-\{3\} \to \mathbf{R}-\{2\}$$

$$x \to f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \qquad x \to g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Veamos que $g \circ f = Id_{\mathbf{R}-\{3\}}$ y que $f \circ g = Id_{\mathbf{R}-\{2\}}$,

$g \circ f: \mathbf{R}-\{2\} \to \mathbf{R}-\{3\} \to \mathbf{R}-\{2\}$;

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2f(x)+1}{f(x)-3} = \frac{2\frac{3x+1}{x-2}+1}{\frac{3x+1}{x-2}-3} = \frac{\frac{6x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x-2}}{\frac{3x+1}{x-2}-\frac{3(x-2)}{x-2}} = \frac{7x}{7} = x.$$

$f \circ g: \mathbf{R}-\{3\} \to \mathbf{R}-\{2\} \to \mathbf{R}-\{3\}$;

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = \frac{3g(x)+1}{g(x)-2} = \frac{3\dfrac{2x+1}{x-3}+1}{\dfrac{2x+1}{x-3}-2} = \frac{\dfrac{6x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x-3}}{\dfrac{2x+1}{x-3}-\dfrac{2(x-3)}{x-3}} = \frac{7x}{7} = x.$$

Conclusión: La aplicación f es una función inversible definida de $\mathbf{R}-\{2\}$ a $\mathbf{R}-\{3\}$ cuya aplicación inversa es la aplicación g.

d) La aplicación f está definida sobre el conjunto de números mayores o iguales que 1 puesto que para los números menores que 1, la expresión presenta raíces de números negativos (estas no son números reales). Así pues, $A = [1,\infty)$, mientras que $B = [0,\infty)$ pues la raíz de un número o es un número positivo o es cero.

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2+1.$$

Se considera la aplicación $g: [0,\infty)\to[1,\infty)$; $g(t) = t^2+1$. Veamos que $g\circ f = Id_{[1,\infty)}$ y que $f\circ g = Id_{[0,\infty)}$.

$$g\circ f: [1,\infty)\to[0,\infty)\to[1,\infty);\quad g\circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2+1 = (\sqrt{x-1})^2+1 = x.$$

$$f\circ g: [0,\infty)\to[1,\infty)\to[0,\infty);\quad f\circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x.$$

Obsérvese que dado un número real positivo n *existen dos números reales con el mismo valor absoluto cuyos cuadrados son el número* n. *Nosotros definimos* $\sqrt{n}$ *como el número positivo de los dos.*

Conclusión: La función f está definida de $\mathbf{R}-\{2\}$ a $\mathbf{R}-\{3\}$ y su función inversa es la función g. Obsérvese que la función $h^*: \mathbf{R}\to[1,\infty)$, con $h^*(x) = x^2+1$ no es inversible y, sin embargo, $h: [0,\infty)\to[1,\infty)$, con $h(x) = x^2+1$ si es inversible.

TEMA 4

Combinatoria

Problema 1

Se desean escribir números y se pregunta:

a) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas sin el cero se pueden escribir?

b) ¿Cuántos números de cinco cifras hay?

c) ¿Cuántos números de ocho cifras son divisibles por cinco?

d) ¿Cuántos números de seis cifras distintas hay entre 650000 y 660000?

Solución.

a) Inicialmente pensamos que en un caso particular, por ejemplo, elegidas las cifras 1,2,3,7 se pueden formar varios números como:

1327 (mil trescientos veintisiete), 3721 (tres mil setecientos veintiuno)...

Así pues, comprobamos que la elección de los cuatro dígitos no basta para determinar un número, pues éste requiere que dichos dígitos se escriban en una determinada posición; unidad, decena, centena y unidad de mil. Es decir los elementos deben ser relacionados en un cierto orden.

Además deben elegirse cifras distintas sin considerar el 0, por lo tanto, cada número de cuatro cifras distintas que no contenga la cifra 0 es una variación de cuatro elementos tomadas del conjunto de cifras $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Con lo cual el número de dichos números es el número de este tipo de variaciones.

$$V_4^9 = V(9,4) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

b) Análogamente pensamos en casos particulares. Por ejemplo:

53216 , 52316 son dos números distintos (las cifras se escriben en distintas posiciones),

55333 es un número de cinco cifras (alguna cifra se puede repetir),

05015 no es un número de cinco cifras.

Así pues, se observa que en la primera posición no se puede poner la cifra 0, por tanto, debe ponerse alguna de las otras nueve.

Supuesto que la primera cifra es un 1, para construir un número de cinco cifras basta rellenar las otras cuatro posiciones, es decir, basta construir una expresión de cuatro cifras.

Cada expresión de cuatro cifras es una variación con repetición de cuatro elementos elegidos entre los 10 dígitos.

$$\text{Nº de expresiones} = VR(10,4) = 10^4 = 10000$$

Ahora bien, en lugar del número 1 se podría elegir cualquiera de los otros 8 restantes cifras no nulas. Así pues

$$\text{Nº de números} = V(9,1) \cdot VR(10,4) = 9 \cdot 10000 = 90000.$$

c) Se tiene que

13245679 y 31245679 son dos números distintos (cifras expresadas ordenadamente),

11112357 es un número de ocho cifras (se puede repetir cifra),

01212121 no es un número de ocho cifras (la primera cifra no puede ser 0).

Para que un número sea divisible por cinco debe cumplir que su última cifra sea 0 ó 5, así pues, se deben rellenar con números ocho posiciones.

La primera se debe rellenar con un elemento del conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, mientras que la última se debe rellenar con un elemento del conjunto {0,5}. Las restantes se deben rellenar con cualquier cifra y puede repetirse cifra.

$$\text{Nº de números} = V(9,1) \cdot VR(10,6) \cdot V(2,1) = 9 \cdot 10^6 \cdot 2 = 18000000.$$

d) Se tiene que

650123 y 651023 son números distintos (se expresa ordenadamente).

650222 no es un número deseado (no se puede repetir cifra).

Consiste en rellenar únicamente las cuatro últimas posiciones:

$$\text{Nº de números} = V(8,4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

Problema 2

En una carrera de maratón intervienen 4 españoles, 4 italianos, 4 alemanes, 4 ingleses y 4 franceses. Supuesto que terminan la carrera todos los corredores, se pide determinar:

a) ¿Cuántos podiums distintos pueden darse al acabar la carrera ?

b) ¿Cuántos podiums distintos pueden darse en los cuales no hay españoles?

c) ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden darse de forma que tres de los componentes españoles se clasifiquen juntos?

d) ¿Cuántas clasificaciones distintas pueden darse de forma que el segundo y tercero tengan la misma nacionalidad y que el cuarto y el quinto tengan otra misma nacionalidad?

Solución.

a) Un podium consiste en tres personas, A, B y C, situadas en tres puestos distintos, (A,B,C) y (B,A,C) son dos podiums distintos, (A,A,B) no es un podium pues la persona A no puede ser primero y segundo a la vez.

Así pues, es importante la posición que ocupa cada persona y no se puede repetir ninguna persona. Además, como el número de participantes es 20 se tiene:

$$N^{o} \text{ de podiums} = V(20,3) = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

b) Ahora se tiene la misma situación que en el apartado anterior pero contando con 4 personas menos.

$$N^{o} \text{ de podiums} = V(16,3) = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360.$$

c) Como tres españoles deben clasificarse juntos, entonces se debe determinar de cuantas formas distintas se pueden clasificar esos tres españoles entre si.

$$N^{o} \text{ de elección de tres españoles} = V(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Una vez determinados tres españoles se debe elegir la posición que ocupará el primero de ellos.

$$N^{o} \text{ de posiciones posibles} = 18.$$

Ahora determinados los tres españoles ordenadamente y la posición que ocupa el primero quedan 17 personas que clasificar en 17 puestos.

$$N^{o} \text{ de clasificaciones restantes} = P(17) = 17! = 355687428096000.$$

Así pues,

$$N^{o} \text{ de clasificaciones pedidas} = 18 \cdot V(4,3) \cdot P(17) = 18.4.3.2.17! = 153656968937472000.$$

d) Inicialmente, se determinan las distintas formas de elegir nacionalidades distintas:

$$N^{o} \text{ de nacionalidades elegidas} = V(5,2) = 5 \cdot 4 = 20.$$

$$N^{o} \text{ de elección de personas } 1^{o} \text{ nacionalidad} = V(4,2) = 4 \cdot 3 = 12.$$

$$N^{o} \text{ de elección de personas } 2^{o} \text{ nacionalidad} = V(4,2) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Las formas distintas de ocupar los cuatro puestos por distintas personas de dos nacionalidades (2 a 2).

$$N^{o} \text{ de elección 2 a 2} = V(5,2) \cdot V(4,2) \cdot V(4,2) = 20 \cdot 12 \cdot 12 = 2880.$$

Una vez ocupados los cuatro puestos se tienen 16 personas que deben ocupar los 16 puestos clasificatorios restantes.

$$N^{o} \text{ de clasificaciones restantes} = P(16) = 16! = 20922789888000.$$

Así pues,

$$N^{o} \text{ de clasificaciones pedidas} = V(5,2) \cdot V(4,2) \cdot V(4,2) \cdot P(16) = 60257634877440000.$$

Problema 3

Tres matrimonios van juntos al cine y los sitúan en una determinada fila de butacas todos juntos y al salir del cine deciden ir a cenar y los sitúan en una mesa para seis comensales que es redonda. Se pide determinar:

a)¿ De cuántas formas distintas se han podido sentar en el cine?

b)¿ De cuántas formas distintas se han podido sentar en la cena?

c)¿ De cuántas formas distintas se pueden sentar los seis de forma que las mujeres estén

juntas en el cine?

d)¿ De cuántas formas distintas se pueden sentar los seis de forma que no haya dos personas del mismo sexo juntas en la cena?

Solución.

a) La colocación en el cine es lineal en seis butacas

$$B_1\ B_2\ B_3\ B_4\ B_5\ B_6$$

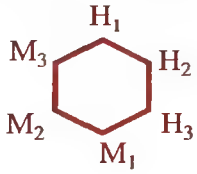
y la colocación es distinta en los dos siguientes casos (H hombre, M mujer, 1,2 y 3 matrimonio),

$$H_1\ M_1\ H_2\ M_2\ H_3\ M_3 \quad \text{o} \quad H_1\ H_2\ M_1\ M_2\ M_3\ H_3$$

Así pues, es importante la posición ocupada.

$$\text{N° de formas} = P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\,.$$

b) Una colocación en la mesa circular es, por ejemplo,



Al cortar cada colocación circular por una cara del exágono obtenemos una colocación lineal, por ejemplo, cortando por la cara $H_1\ H_2$ obtenemos

$$H_2\ H_3\ M_1\ M_2\ M_3\ H_1$$

Además, se observa que existen seis colocaciones lineales que se transforman en la misma colocación circular, pues basta pensar en cortar cada posición circular por cada una de sus caras. Así pues,

$$\text{N° de colocaciones lineales} = 6 \cdot (\text{N° de colocaciones circulares})\,.$$

$$\text{N° de colocaciones circulares} = \frac{P(6)}{6} = \frac{6!}{6} = 5! = 120\,.$$

c) Inicialmente se determina el número de formas de reservar tres asientos seguidos para las mujeres; 4 (pues la primera mujer se puede sentar en las butacas 1,2,3 y 4).

Una vez elegida una reserva de tres asientos seguidos, las mujeres pueden sentarse en esos tres asientos de varias formas distintas.

$$\text{N° formas mujeres} = P(3) = 3! = 6\,.$$

Una vez sentadas las mujeres de una forma determinada, los hombres se pueden sentar de varias formas distintas:

$$\text{N° formas hombres} = P(3) = 3! = 6\,.$$

Así pues,

$$\text{N° formas} = (\text{N° e. butacas}) \cdot (\text{N° f. mujeres}) \cdot (\text{N° f. hombres}) = 4 \cdot P(3) \cdot P(3) = 144\,.$$

d) Como las colocaciones circulares se obtienen a partir de las lineales, entonces se analiza primero el número de posiciones lineales.

Estudiamos el número de formas de reservar tres asientos intercalados para las mujeres; 2 (pues la primera mujer se puede sentar en las butacas lineales 1 y 2).

Una vez elegida una reserva las mujeres se pueden sentar de P(3) formas distintas, y una vez sentadas estas, los hombres se pueden sentar de P(3) formas distintas.

Así pues,

$$\text{Nº formas lineales} = 2 \cdot P(3) \cdot P(3) = 72.$$

por lo tanto,

$$\text{Nº formas circulares} = \frac{\text{Nº formas lineales}}{6} = \frac{2 \cdot P(3) \cdot P(3)}{6} = 12.$$

Problema 4

En una escapada del Tour de Francia hay tres corredores del equipo A, dos del equipo B, uno del equipo C, uno del equipo D y dos del equipo E. Se pide:

a) ¿De cuántas formas distintas pueden llegar estos corredores a la meta?

b) ¿De cuántas formas distintas pueden clasificarse los equipos de esta escapada?

c) ¿De cuántas formas distintas pueden clasificarse los equipos de forma que no gane el equipo con más componentes?

Solución.

a) Como hay un total de nueve corredores para ocupar las nueve primeras posiciones en la meta, entonces

$$\text{Nº de clasificaciones de corredores} = P(9) = 9! = 362880.$$

b) Una posible clasificación de corredores es:

$$A_1\ B_1\ C_1\ A_2\ A_3\ B_2\ D_1\ E_1\ E_2$$

que corresponde a la siguiente clasificación de equipos

$$A\ B\ C\ A\ A\ B\ D\ E\ E$$

Ahora bien, la clasificación de corredores

$$A_2\ B_1\ C_1\ A_1\ A_3\ B_2\ D_1\ E_1\ E_2$$

corresponde a la anterior clasificación por equipos, mientras que la clasificación de corredores

$$B_1\ A_2\ C_1\ A_1\ A_3\ B_2\ D_1\ E_1\ E_2$$

corresponde a otra clasificación por equipos

$$B\ A\ C\ A\ A\ B\ D\ E\ E$$

Es decir, es importante la posición en la cual se presenta cada letra de equipo y sin embargo la colocación de los distintos corredores de un mismo equipo no importa. Así pues,

$$\text{Nº clasificaciones equipos} = PR(9)^{3,2,2,1,1} = \frac{9!}{3!2!2!1!1!} = \frac{9!}{3!2!2!} = 15120$$

c) Si gana B se tienen $PR(8)^{3,1,2,1,1}$ clasificaciones distintas.

Si gana C se tienen $PR(8)^{3,2,2,1}$ clasificaciones distintas.

Si gana D se tienen $PR(8)^{3,2,2,1}$ clasificaciones distintas.

Si gana E se tienen $PR(8)^{3,2,1,1,1}$ clasificaciones distintas.

Así pues,

$$N^{o}\text{ de clasificaciones} = PR(8)^{3,1,2,1,1} + PR(8)^{3,2,1,1,1} + 2\cdot PR(8)^{3,2,2,1} =$$

$$= 2\cdot\frac{8!}{3!2!} + 2\cdot\frac{8!}{3!2!2!} = 10080.$$

Problema 5

Cuatro profesores deciden hacer un libro con treinta capítulos y se decide que un determinado profesor escriba nueve capítulos, otro ocho, otro siete y el último seis. Los profesores eligen los capítulos del libro que desean escribir.

a) ¿De cuántas formas distintas puede elegir capítulos el primer autor?

b) ¿De cuántas formas distintas, atendiendo al número de capítulos, pueden ser entregados los siete primeros capítulos escritos al editor?

c) ¿De cuántas formas distintas pueden elegir capítulos los dos primeros autores?

d) ¿De cuántas formas distinas pueden elegir capítulos los cuatro autores?

Solución.

a) El primer profesor debe elegir nueve números del 1 al 30, por ejemplo:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

Ahora bien, si hubiese elegido los capítulos

$$2,1,3,4,5,6,7,8,9$$

estaría realizando una misma elección. Además, este autor no podría realizar una elección del siguiente tipo

$$1,1,3,4,5,6,7,8,9$$

puesto que no escribiría nueve capítulos. Así pues, cada elección de los nueve capítulos es una combinación de treinta elementos tomados de nueve en nueve, y su número es:

$$N^{o}\text{ de elecciones} = C(30,9) = \binom{30}{9} = \frac{30!}{9!21!} = 14307151$$

b) El editor recibe siete números distintos y cuando los lee, es lo mismo leer 1,2,3,4,5,6,7 que leer 2,3,4,5,6,7,1 (combinaciones).

Así pues,

$$N^{o}\text{ de entregas} = C(30,7) = \binom{30}{7} = \frac{30!}{7!23!} = 2035800.$$

c) En el primer apartado se tiene el número de elecciones distintas del primer autor. Así pues, supuesto que éste ha realizado una elección, entonces el segundo autor tan solo tiene que elegir 8 entre los 21 capítulos restantes.

$$\text{N° de elecciones 2° autor} = C(21,8) = \binom{21}{8} = 203490.$$

Así pues,

$$\text{N° de elecciones} = (\text{N° elecciones 1° autor}) \cdot (\text{N° elecciones 2° autor}) =$$

$$= \binom{30}{7} \cdot \binom{21}{7} = \frac{30!}{9!21!} \cdot \frac{21!}{8!13!} = \frac{30!}{9!8!13!} = 2911361953500.$$

d) En lugar de razonar como en el apartado c, que se puede, razonamos de la siguiente forma.

Cada forma distinta de elección se corresponde con listas de 30 elementos donde hay nueve 1, ocho 2, siete 3 y seis 4. Así pues,

$$\text{N° de elecciones} = PR(30)^{9,8,7,6} = \frac{30!}{9!8!7!6!} = 4995897112206000.$$

Problema 6

Sobre un papel cuadriculado se dibuja un rectángulo de 4 por 6 cuadritos (alto por ancho). Siguiendo las líneas de los cuadritos se dibuja un camino que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos caminos distintos se pueden dibujar de forma que cada vez que se dibuja un trazo se esté más cerca de la meta?

Solución.

Los caminos pedidos requieren (4 horizontales y 6 verticales) diez pasos para llegar desde un vértice al otro, por tanto, podemos representar un camino como una lista de diez letras; H para los pasos horizontales y V para los pasos verticales.

Las listas

VVVHHHHVHH y VVHHHHHHVV

corresponden a dos caminos distintos. Luego, un camino queda determinado al indicarse en que números de pasos se dan los 4 verticales (o los seis horizontales). Es decir, hay que elegir entre diez pasos cuatro y estudiar cuantas formas de elección hay

$$\text{N° de caminos} = \text{N° de elección} = C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210.$$

Problema 7

El trabajo de un operario consiste en la fabricación de cinco tipos distintos de piezas y su tarea consiste en fabricar tres piezas de cualquier tipo al día.

a) ¿Cuántas fabricaciones distintas puede producir en un día?

b) ¿Cuántas fabricaciones distintas puede producir en dos días de forma que se produzca una única pieza de un cierto tipo?

Solución.

a) El trabajador puede presentar su tarea nombrando las piezas hechas, por ejemplo

A, B, C

Si hubiese dicho

B, A, C

esta sería la misma tarea. Así pues, el orden a la hora de indicar las piezas no es importante. Además, podría presentar las siguientes tareas:

A, A, A ó A, B, B

es decir puede repetir piezas. Por lo tanto, cada tarea diaria se corresponde con una combinación con repetición de cuatro elementos elegidos de tres en tres.

$$\text{Nº de tareas} = CR(5,3) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35.$$

b) Análogamente, una vez determinado el tipo del cual se produce la pieza única, quedan por determinar las cinco piezas restantes de los cuatro tipos restantes.

$$\text{Nº de tareas} = (\text{Nº de piezas únicas})\cdot(\text{Nº de otras piezas}) = 5\cdot CR(4,5) = 5\cdot\binom{8}{5} = 280.$$

Problema 8

Desarrollar las siguientes potencias:

a) $(2x+3)^5$ b) $(x-2y)^6$

Solución.

a) Al aplicar el desarrollo del binomio de Newton $(a+b)^n$ donde $a=2x$ y $b=3$ y $n=5$ obtenemos el siguiente desarrollo:

$$(2x+3)^5 = \binom{5}{0}\cdot(2x)^5 + \binom{5}{1}\cdot(2x)^4\cdot 3^1 + \binom{5}{2}\cdot(2x)^3\cdot 3^2 +$$

$$+ \binom{5}{3}\cdot(2x)^2\cdot 3^3 + \binom{5}{4}\cdot(2x)^1\cdot 3^4 + \binom{5}{5}\cdot 3^5 =$$

$$= 2^5.x^5 + 5\cdot 2^4\cdot 3.x^4 + 10\cdot 2^3.3^2.x^3 + 10\cdot 2^2.3^3.x^2 + 5\cdot 2\cdot 3^4.x + 243 =$$

$$= 32.x^5 + 240.x^4 + 720.x^3 + 1080.x^2 + 810.x + 243$$

b) Análogamente,

$$(x-2y)^6 = \binom{6}{0}\cdot x^6 + \binom{6}{1}\cdot x^5\cdot(-2y)^1 + \binom{6}{2}\cdot x^4\cdot(-2y)^2 +$$

$$+ \binom{6}{3}\cdot x^3\cdot(-2y)^3 + \binom{6}{4}\cdot x^2\cdot(-2y)^4 + \binom{6}{5}\cdot x^1\cdot(-2y)^5 + \binom{6}{6}\cdot(-2y)^6 =$$

$$= \binom{6}{0}\cdot x^6 - \binom{6}{1}\cdot x^5\cdot (2y)^1 + \binom{6}{2}\cdot x^4\cdot (2y)^2 - \binom{6}{3}\cdot x^3\cdot (2y)^3 +$$

$$+ \binom{6}{4}\cdot x^2\cdot (2y)^4 - \binom{6}{5}\cdot x^1\cdot (2y)^5 + \binom{6}{6}\cdot (2y)^6 =$$

$$= x^6 - 12x^5y + 60x^4y^2 - 160x^3y^3 + 240x^2y^4 - 192xy^5 + 64y^6.$$

Problema 9

Determinar:

a) El décimo término del desarrollo de $(3x^2+7y)^{20}$.

b) El séptimo término del desarrollo de $(3x+\frac{1}{x^2})^9$.

Solución.

a) $T_{10} = \binom{20}{9}\cdot (3x^2)^{11}\cdot (7y)^9 = \frac{20!}{9!\cdot 11!}\cdot 3^{11}\cdot x^{22}\cdot 7^9\cdot y^9 =$

$= 1200665489613702840\, x^{22}y^9$ (pues el término 1° tiene coeficiente $\binom{20}{0}$, el 2° $\binom{20}{1}$...).

b) Análogamente,

$$T_7 = \binom{9}{6}\cdot (3x)^3\cdot (\frac{1}{x^2})^6 = 2268\cdot \frac{1}{x^9}.$$

Problema 10

Determinar el término del binomio $(x^3-\frac{1}{x})^6$ que contiene la expresión x^2.

Solución.

Supuesto que es n el término buscado se tiene

$$T_n = \binom{6}{n-1}\cdot (x^3)^{6-(n-1)}\cdot (\frac{-1}{x})^{n-1} = \binom{6}{n-1}\cdot (-1)^{n-1}\cdot \frac{(x^3)^{7-n}}{x^{n-1}}.$$

Así pues,

$$\frac{(x^3)^{7-n}}{x^{n-1}} = x^2 \Rightarrow \frac{x^{21-3n}}{x^{n-1}} = x^2 \Rightarrow x^{21-3n-(n-1)} = x^2 \Rightarrow x^{22-4n} = x^2,$$

luego, $22-4n=2 \Rightarrow n=5$.

Problema 11

Desarrollar la siguiente expresión (trinomio) $(x+y+z)^4$.

Solución.

Reescribimos el trinomio como un binomio (para pueder aplicar el desarrollo del binomio de Newton).

$$(x+y+z)^4 = ((x+y)+z)^4 = \binom{4}{0}\cdot(x+y)^4 + \binom{4}{1}\cdot(x+y)^3\cdot z +$$

$$+ \binom{4}{2}\cdot(x+y)^2\cdot z^2 + \binom{4}{3}\cdot(x+y)\cdot z^3 + \binom{4}{4}\cdot z^4 =$$

$$= (x+y)^4 + 4(x+y)^3 z + 6(x+y)^2 z^2 + 4(x+y)z^3 + z^4 .$$

Al desarrollar nuevamente cada binomio queda:

$$(x+y+z)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 +$$

$$+ 4(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)z + 6(x^2+2xy+y^2)z^2 + 4(x+y)z^3 + z^4 =$$

$$= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+4x^3z+12x^2yz+12xy^2z+4y^3z +$$

$$+ 6x^2z^2+12xyz^2+6y^2z^2 + 4xz^3+4yz^3+z^4 .$$

TEMA 5

Probabilidad

Problema 1

Construir el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de lanzar dos veces un dado. Estudiar el número de elementos del espacio muestral del experimento de lanzar cuatro veces un dado.

Solución. Al realizar el experimento se obtiene un determinado resultado (además, si se realiza varias veces el experimento pueden presentarse distintos resultados) que consiste en un par de números enteros del 1 al 6; por ejemplo (3,5). El primer número corresponde al número mostrado en la primera tirada y el segundo número corresponde a la segunda tirada.

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados o sucesos elementales,

EM ={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1),(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2),
(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3),(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4),
(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5),(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)},

como se observa, el espacio muestral tiene, 6^2, 36 elementos o sucesos elementales.

Para estudiar el número de elementos del espacio muestral correspondiente al experimento de lanzar cuatro veces un dado, acordamos representar el resultado del experimento como una lista de cuatro números, por ejemplo (2,3,5,6).

El resultado (2,3,5,6) es distinto del resultado (3,2,5,6), además, es posible presentar un resultado como (2,2,2,5) (se puede repetir un número). Así pues, cada resultado es una variación con repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4.

$$\text{Nº de sucesos elementales} = VR(6,4) = 6^4 = 1296.$$

Problema 2

Determinar el espacio muestral de los siguientes experimentos y estudiar la probabilidad de cada suceso elemental.

a) Lanzar un dado y una moneda.

b) Lanzar dos monedas; una de cinco pesetas y otra de cien.

c) Lanzar dos monedas de cien pesetas.

d) Obtener un número al sumar el resultado de dos dados al ser lanzados.

Solución.

a) En este experimento acordamos representar los resultados del experimento o suceso elemental como un par de elementos. El primero es un número entero del 1 al 6 y el segundo es una letra; C para indicar cara y X para indicar cruz. El espacio muestral es:

$$EM = \{ (1,C), (2,C), (3,C), (4,C), (5,C), (6,C), (1,X), (2,X), (3,X), (4,X), (5,X), (6,X) \}.$$

Cada suceso elemental posee la misma probabilidad (pues resulta igual de "fácil" que salga uno cualquiera de los números e igual de "fácil" que salga cara o cruz), así pues,

$$P(EM) = P(\{ (1,C) \}) + \ldots + P(\{ (6,X) \}) \Rightarrow 1 = 12 \cdot p \Rightarrow p = \frac{1}{12}.$$

Conclusión: Luego, la probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$, así pues, se trata de un espacio muestral equiprobable.

b) Cada resultado lo representamos de la forma (c,C) donde el primer elemento corresponde a la moneda de 5 pts. y el segundo a la de 100 pts.

$$EM = \{ (c,C), (c,X), (x,C), (x,X) \}.$$

Cada suceso elemental posee la misma probabilidad (pues en la moneda de 5 pts. es igual de "fácil" que salga cara o cruz y lo mismo en la otra moneda), es decir, el espacio muestral es equiprobable.

$$P(\text{suceso elemental}) = \frac{1}{\text{N° de sucesos elementales}} = \frac{1}{4}.$$

c) Al lanzar las dos monedas iguales tan sólo se distinguen los siguientes casos:

$$CC \text{ (cara y cara)}, \quad CX \text{ (cara y cruz)}, \quad XX \text{ (cruz y cruz)},$$

es decir, $EM = \{CC, CX, XX\}$.

Los sucesos elementales no son equiprobables. Para ver esto basta pensar que pudiésemos distinguir las monedas, por ejemplo una moneda la marcamos con un rotulador. Evidentemente, al marcar con un rotulador distinguimos otro espacio muestral como él del apartado anterior (obsérvese que no se modifica la "facilidad" de que salga una cara o una cruz al estar marcada una moneda),

$$EM_{auxiliar} = \{ (c,c), (c,x), (x,c), (x,x) \}.$$

Se observa que los sucesos elementales del EM se describen en términos del $EM_{auxiliar}$ de la forma siguiente:

$$\{ CC \} = \{(c,c)\} \Rightarrow P(\{ CC \}) = P(\{(c,c)\}) = \frac{1}{4}.$$

$$\{ CX \} = \{(c,x),(x,c)\} \Rightarrow P(\{ CX \}) = P(\{(c,x)\}) + P(\{(x,c)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\{ XX \} = \{(x,x)\} \Rightarrow P(\{ XX \}) = P(\{(x,x)\}) = \frac{1}{4}.$$

(El espacio muestral EM no es equiprobable y se ha construido un espacio muestral auxiliar de sucesos equiprobables para determinar

la probabilidad de cada suceso elemental).

d) El espacio muestral es EM = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Los sucesos elementales no tienen la misma probabilidad (basta fijarse que {2} es más "difícil" de obtener que {7}; compruébese experimentalmente). Para determinar la probabilidad de cada suceso elemental consideramos el espacio muestral auxiliar correspondiente a las distintos resultados de lanzar dos dados que distinguimos (aunque se deba marcar a uno de ellos si los dados son iguales).

El espacio muestral auxiliar es el correspondiente al Problema 1. Así pues,

$\{2\} = \{ (1,1) \}$,

$\{3\} = \{ (1,2), (2,1) \}$,

$\{4\} = \{ (1,3), (2,2), (3,1) \}$,

$\{5\} = \{ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) \}$,

$\{6\} = \{ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) \}$,

$\{7\} = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$,

$\{8\} = \{ (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) \}$,

$\{9\} = \{ (3,6), (4,5), (5,4), (6,3) \}$,

$\{10\} = \{ (4,6), (5,5), (6,4) \}$,

$\{11\} = \{ (5,6), (6,5) \}$,

$\{12\} = \{ (6,6) \}$.

Por lo tanto, se tiene:

$$P(\{2\}) = \frac{1}{36}, \quad P(\{3\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad P(\{4\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(\{5\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P(\{6\}) = \frac{5}{36}, \quad P(\{7\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(\{8\}) = \frac{5}{36}, \quad P(\{9\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

$$P(\{10\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(\{11\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad P(\{12\}) = \frac{1}{36}.$$

Conclusión: La probabilidad de cada suceso elemental se calcula en relación al espacio muestral auxiliar equiprobable utilizando la fracción (regla de Laplace)

$$\frac{\text{N° casos favorables del espacio muestral auxiliar}}{\text{N° casos posibles del espacio muestral auxiliar}}.$$

Problema 3

Se elige un número de cuatro cifras. Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que se obtenga un número en el cual no se repite ningún dígito.

b) Que se obtenga un número divisible por 5.

c) Que se obtenga un número divisible por 4.

d) Que se obtenga un número divisible por 20.

Solución. La probabilidad de obtener un número de cuatro cifras o cualquier otro es la misma, por ello, el espacio muestral está constituido por sucesos elementales equiprobables (y se puede aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de un suceso).

El primer paso consiste en determinar el número de elementos del espacio muestral equiprobable (es decir, el número de resultados elementales posibles al realizar el experimento): los casos posibles. Para ello, observamos que:

2134 y 2314 son dos números distintos (importa la posición de cada cifra).

2213 es un número de cuatro cifras (se puede repetir una cifra).

0213 no es un número de cuatro cifras.

Así pues, se trata de elegir una cifra del 1 al 9 para el primer dígito y tres cifras del 0 al 9 para los dígitos siguientes.

Casos posibles = (Nº de elecciones 1er cifra) · (Nº de elecciones tres cifras restantes) =

$$= V(9,1) \cdot VR(10,3).$$

El segundo paso consiste en determinar el número de elementos que constituyen el suceso: los casos favorables.

a) S_A = {cuatro cifras sin repetir}. Se observa que el número 2212 no pertenece a S_A.

Casos favorables = (Nº de elecciones 1er cifra)·(Nº de elecciones tres cifras) = $V(9,1) \cdot V(9,3)$, así pues,

$$P(S_A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{V(9,1)\,V(9,3)}{V(9,1)\,VR(10,3)} = \frac{V(9,3)}{VR(10,3)} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10^3} = \frac{63}{125}.$$

b) S_B = {múltiplo de cinco}. Se observa que un número pertenece a S_B, si acaba en 5 o en 0, por ejemplo $1535 \in S_B$.

Casos favorables = (Nº de elecciones 1er cifra)·(Nº de elecciones dos cifras)·(Nº de elecciones última cifra) = $V(9,1) \cdot VR(10,2) \cdot V(2,1)$, así pues,

$$P(S_B) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{V(9,1)\,VR(10,2)\,V(2,1)}{V(9,1)\,VR(10,3)} = \frac{10^2 \cdot 2}{10^3} = \frac{1}{5}.$$

c) S_C = {múltiplo de cuatro}. Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras forman un número divisible por 4. Además, para que un número de dos cifras sea divisible por 4 caben dos posibilidades:

- El primer dígito es del conjunto {0, 2, 4, 6, 8} y el segundo del conjunto {0, 4, 8}.

  Nº de números = $V(5,1) \cdot V(3,1) = 5 \cdot 3 = 15$.

- El primer dígito es del conjunto {1, 3, 5, 7, 9} y el segundo del conjunto {2, 6}.

  Nº de números = $V(5,1) \cdot V(2,1) = 5 \cdot 2 = 10$.

Así pues,

Casos favorables = (Nº de elecciones 1er cifra)·(Nº de elecciones 2ª cifra)·(Nº de elecciones de números de dos cifras divisible por 4) = $V(9,1) \cdot V(10,1) \cdot V(5,1) \cdot (V(3,1) + V(2,1))$,

y por tanto, $P(S_B) = \dfrac{V(9,1)\,V(10,1)\,V(5,1)\,(V(3,1)+V(2,1))}{V(9,1)\,VR(10,3)} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

d) S_D = {múltiplo de 20}. Para que un número sea divisible por 20 debe ser la última cifra un 0 (para ser divisible por 10) y la penúltima debe ser o 0 o cifra par (para que el número al dividirlo por 10 sea divisible por 2).

Casos favorables = (Nº de elecciones 1er cifra)·(Nº de elecciones 2ª cifra)·(Nº de elecciones 3ª cifra) = $V(9,1)\cdot V(10,1)\cdot V(5,1)$,

así pues, $P(S_B) = \dfrac{V(9,1)\,V(10,1)\,V(5,1)}{V(9,1)\,VR(10,3)} = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.

Problema 4

Se extraen tres cartas de una baraja española y se pide determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener tres figuras (sota, caballo o rey).

b) Obtener una pareja (dos cartas del mismo valor).

c) Obtener tres cartas del mismo palo.

d) Obtener tres cartas que no formen un trío y que sean de palos diferentes.

Solución. Las cartas de una baraja española son 40 distribuidas en cuatro palos (Oros, Copas, Espadas y Bastos) y numeradas del 1 al 10 las cartas de cada palo (8=sota, 9= caballo, 10= rey). Al extraer tres cartas nos da lo mismo escribir 8O, 5C, 3B que 3B, 5C, 8O pues se tiene el mismo grupo de cartas. Además, al experimento le corresponde un espacio muestral de sucesos elementales equiprobables (y aplicaremos la regla de Laplace) pues es igual de "fácil" obtener una determinada carta que otra cualquiera y ánalogo para obtener tres cartas.

Nº de casos posibles = $C(40,3) = \binom{40}{3} = \dfrac{40!}{37!\cdot 3!} = 9880$.

a) Un caso favorable consiste en tres figuras elegidas entre doce que posee la baraja.

Nº de casos favorables = $C(12,3) = \binom{12}{3} = \dfrac{12!}{9!\cdot 3!} = 220$,

luego, $P(\{\text{tres figuras}\}) = \dfrac{C(12,3)}{C(40,3)} = \dfrac{220}{9880} = \dfrac{11}{494} \cong 0'022$.

b) Para obtener una pareja de un cierto valor se tienen que elegir sólo 2 cartas entre 4 que son de ese valor y elegir otra carta que no posea el mismo valor, entre las 36 restantes. Además, ha de elegirse el valor de la pareja entre 10 valores distintos que hay.

Nº de casos favorables = (Nº de valores) · (Nº de parejas) · (Nº de elección tercer carta) =

$= 10\cdot C(4,2)\cdot 36 = 10\cdot\binom{4}{2}\cdot 36 = 10\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 36 = 2160$,

luego, $P(\{\text{pareja}\}) = \dfrac{10\cdot C(4,2)\cdot 36}{C(40,3)} = \dfrac{2160}{9880} = \dfrac{54}{247} \cong 0'218$.

c) Para obtener tres cartas del mismo palo hay que determinar el palo y elegir 3 cartas entre 10 que hay.

$$\text{N° de casos favorables} = (\text{N° de palos})\cdot(\text{N° de tres cartas}) = 4\cdot C(10,3) = 4\cdot\frac{10!}{7!\cdot 3!} = 480,$$

luego, $$P(\{\text{mismo palo}\}) = \frac{4\cdot C(10,3)}{C(40,3)} = \frac{480}{9880} = \frac{12}{247} \cong 0'048\,.$$

d) Para obtener tres cartas de distinto palo han de elegirse inicialmente los palos, $C(4,3) = 4$. Para asegurarse que no forman trío una vez elegido los palos caben dos casos:

- Tres cartas de distinto valor.

  N° de casos = (N° de elecciones tres valores distintos) = $C(10,3) = 120$.

- Dos cartas de un valor y una tercera de otro

(Elegidos Caballo y Rey, se puede formar pareja de Caballos o de Reyes. Hay 6 parejas distintas de Caballos y 6 de Reyes).

N° de casos=(Elec. de valores)·(Casos de pareja)·(N° de parejas)=$C(10,2)\cdot 2\cdot C(4,2) = 540$.

Así pues,

N° de casos favorables = (N° de elecciones de palos) · (N° de elecciones de valores) = $C(4,3)\cdot(C(10,3)+2\cdot C(10,2)\cdot C(4,2)) = 4\cdot 660 = 2640$,

por tanto, $$P(\{\text{distinto palo y no trío}\}) = \frac{2640}{9880} = 0'2672\,.$$

Problema 5

De una baraja española se extraen cinco cartas. ¿Cual es la probabilidad de que no se extraigan cuatro cartas del mismo palo?

Solución. Sean A el suceso de obtener cinco cartas tales que cuatro no son del mismo palo, y A^c el suceso complementario de A, obtener cinco cartas tales que cuatro son del mismo palo. Con estos dos sucesos se tiene la relación

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Para determinar la probabilidad de A se observa que $A^c = B \cup C$ con $B \cap C = \varnothing$ donde B = { únicamente cuatro cartas del mismo palo} y C = {cinco cartas del mismo palo}.

N° casos favorables B = (N° de elecciones de dos palos) · (N° de elecciones de cuatro cartas de un palo) · (N° de elecciones de una carta de otro palo) = $V(4,2)\cdot C(10,4)\cdot C(10,1)$.

N° casos favorables C = (N° de elecciones del palo) · (N° de elecciones de cinco cartas) = $= C(4,1)\cdot C(10,5)$.

N° casos posibles = $C(40,5) = \frac{40!}{35!\cdot 5!} = 658008$.

Así pues,

$$P(B) = \frac{V(4,2)\cdot C(10,4)\cdot C(10,1)}{C(40,5)} = \frac{25200}{658008} \cong 0'038297\,,$$

$$P(C) = \frac{C(4,1)\cdot C(10,5)}{C(40,5)} = \frac{1008}{658008} \cong 0'00153,$$

$$P(A^c) = P(B) + P(C) = \frac{25200}{658008} + \frac{1008}{658008} = \frac{26208}{658008} \cong 0'03982,$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{26208}{658008} \cong 0'96018.$$

Problema 6

¿Cuál es la probabilidad de elegir un número de tres cifras que sea múltiplo de 2 o de 5?

Solución. Se consideran los sucesos A = {múltiplo de 2} y B = {múltiplo de 5}, evidentemente $A \cap B$ = {múltiplo de 2 y de 5} = {múltiplo de 10} y $A \cap B \neq \varnothing$.

El suceso del cual se solicita la probabilidad es $A \cup B$, y se sabe que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

El espacio muestral es de equiprobabilidad por tanto empleamos la regla de Laplace para determinar la probabilidad de los sucesos A, B y $A \cap B$.

N° casos posibles = (N° de elecciones 1er dígito) · (N° de elecciones dos dígitos) = $= V(9,1)\cdot VR(10,2) = 900$ (pues el primer dígito no puede ser 0).

N° casos favorables A = (N° de elecciones 1er dígito) · (N° de elecciones 2° dígito) · (N° de elecciones 3er dígito) = $V(9,1)\cdot V(10,1)\cdot V(5,1) = 450$ (la terminación debe ser 0, 2, 4, 6 u 8).

N° casos favorables B = (N° de elecciones 1er dígito) · (N° de elecciones 2° dígito) · (N° de elecciones 3er dígito) = $V(9,1)\cdot V(10,1)\cdot V(2,1) = 180$ (la terminación debe ser 0 ó 5).

N° casos favorables $A \cap B$ = (N° de elecciones 1er dígito) · (N° de elecciones 2° dígito) $= V(9,1)\cdot V(10,1) = 90$ (la terminación debe ser 0).

Luego, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{450}{900} + \frac{180}{900} - \frac{90}{900} = 0'7$.

Problema 7

De una baraja española se extraen cuatro cartas una a una de forma que cada vez que se extrae una carta se devuelve al mazo de cartas. Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener cuatro unos.

b) Obtener cuatro cartas del mismo valor.

c) Obtener únicamente tres veces la misma carta y otra del mismo valor.

d) Obtener una pareja de unos y otra de reyes.

Solución. El experimento se puede considerar como un experimento múltiple formado por la repetición cuatro veces de un experimento base consistente en extraer una única carta. Cada suceso elemental A se describe como una lista de cuatro sucesos elementales del

experimento base, por ejemplo $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$. Además, como el resultado de la repetición del experimento base es independiente del resultado obtenido con anterioridad, se tiene que los sucesos A_1, A_2, A_3 y A_4 son sucesos independientes y

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4).$$

a) Sean los sucesos B_1 = {obtener cuatro unos} y B_1° = {obtener un uno al extraer una única carta}, entonces $B_1 = (B_1^\circ, B_1^\circ, B_1^\circ, B_1^\circ)$, además, $P(B_1^\circ) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ (puesto que hay 4 unos en 40 cartas). Luego,

$$P(B_1) = P(B_1^\circ)\cdot P(B_1^\circ)\cdot P(B_1^\circ)\cdot P(B_1^\circ) = (\frac{1}{10})^4 = \frac{1}{10000} = 0'0001.$$

b) Sean los sucesos: B = {obtener cuatro cartas de igual valor}, B_i = {obtener cuatro cartas de valor i} y B_i° = {obtener una carta de valor i al extraer una carta}. Entonces

$$B = \bigcup_{i=1}^{10} B_i \quad \text{y} \quad B_i = (B_i^\circ, B_i^\circ, B_i^\circ, B_i^\circ),$$

además, $P(B_i^\circ) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ (puesto que hay 4 cartas de valor i en 40 cartas),

$$P(B_i) = P(B_i^\circ)\cdot P(B_i^\circ)\cdot P(B_i^\circ)\cdot P(B_i^\circ) = (\frac{1}{10})^4 = \frac{1}{10000} = 0'0001,$$

$$P(B) = P(B_1) + \ldots + P(B_{10}) = \sum_{i=1}^{10} P(B_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10000} = 10\cdot\frac{1}{10000} = \frac{1}{1000} = 0'001.$$

c) Sean los sucesos:

C = {tres cartas iguales y otra del mismo valor},

$C_{k,p}$ = {tres veces la carta k y del palo p y otra carta de valor k} (k varía del 1 al 10 y p varía del 1 al 4),

$C_{k,p}^\circ$ = {una carta k y del palo p al extraer una única carta}, $P(C_{k,p}^\circ) = \frac{1}{40}$

$C_{k,p}^{\circ\circ}$ = {una carta k pero no del palo p al extraer una única carta}, $P(C_{k,p}^{\circ\circ}) = \frac{3}{40}$.

Se tiene que $C_{k,p} = (C_{k,p}^\circ, C_{k,p}^\circ, C_{k,p}^\circ, C_{k,p}^{\circ\circ})$ y

$$P(C_{k,p}) = P(C_{k,p}^\circ)\cdot P(C_{k,p}^\circ)\cdot P(C_{k,p}^\circ)\cdot P(C_{k,p}^\circ) = \frac{3}{40^4}.$$

$$P(C) = P(C_{1,1}) + \ldots + P(C_{10,4}) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{4} P(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{10} (4\cdot\frac{3}{40^4}) = 10\cdot 4\cdot\frac{3}{40^4} = \frac{3}{40^3}.$$

d) Sea el suceso D = {2 unos y 2 dieces}. Un caso en el cual se verifica este suceso es si se obtienen 1, 1, 10, 10 y otra distinta 10, 1, 1, 10 (obsérvese que existen varias listas en las cuales hay dos unos y dos dieces). Hay C(4,2) listas distintas con las cuales se verifica el suceso D (en realidad, consiste en

asignar dos lugares para los unos de las cuatro extracciones que hay). Además, cada lista con dos unos y dos dieces tiene probabilidad $\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{10^4}$. Luego, $P(D)=C(4,2)\cdot\frac{1}{10^4}=\frac{6}{10^4}$.

Problema 8

Una urna contiene seis bolas blancas y tres bolas rojas. Se extraen tres bolas una a una sin que se reemplacen nuevamente a la urna. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Obtener una bola blanca en la primera extracción.

b) Obtener al menos una bola roja.

Solución. El experimento de extraer tres bolas es un experimento múltiple constituido por la repetición tres veces del experimento básico consistente en extraer una única bola de la urna donde la composición de la urna varia de la primera a la última extracción de bolas.

Un suceso elemental del experimento se puede expresar como una terna de sucesos básicos $A=(A_1^o, A_2^o, A_3^o)$, donde A_1^o es el suceso elemental de la primera extracción (primer experimento básico), A_2^o el de la segunda(segundo experimento básico) y A_3^o el de la tercera(tercer experimento básico). Además, A_1^o, A_2^o, A_3^o no son sucesos independientes, puesto que la probabilidad A_2^o depende de A_1^o y la de A_3^o depende de A_1^o y A_2^o.

Se consideran los sucesos:

A_1 = {Al extraer tres bolas extraer A_1^o en la primera extracción},

A_2 = {Al extraer tres bolas extraer A_2^o en la segunda extracción},

A_3 = {Al extraer tres bolas extraer A_3^o en la tercera extracción},

y se tiene que $A=A_1\cap A_2\cap A_3$ y

$$P(A)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P((A_1\cap A_2)\cap A_3)=$$

$$=P(A_1\cap A_2)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot(P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)),$$

donde $P(A_2/A_1)$ es la probabilidad del suceso A_2 supuesto que en el primer experimento básico ha ocurrido el suceso A_1^o, y $P(A_3/A_1\cap A_2)$ es la probabilidad del suceso A_3 supuesto que los dos primeros experimentos básicos han ocurrido, los sucesos A_1^o, A_2^o.

a) Se considera los sucesos del experimento básico B = {extraer una bola blanca} y E = {extraer una bola de cualquier color}, y el suceso del experimento Z = { extraer una bola blanca en la primera extracción de las tres}. Evidentemente, Z = (B, E, E) y

$$P(Z)=P(B)\cdot P(E/B)\cdot P(E/B\cap E)=\frac{6}{9}\cdot\frac{8}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{2}{3}.$$

b) Se consideran los sucesos del experimento básico R = {extraer una bola roja}, B = {extraer una bola blanca} y E = {extraer una bola de cualquier color}, y el suceso del experimento Z = { extraer al menos una bola roja en alguna de las tres extracciones } y su suceso complementario Z^c = {no extraer bola roja alguna}. Se tiene que $P(Z)=1-P(Z^c)$.

A continuación, calculamos $P(Z^c)$, para ello se consideran los sucesos:

R_1 = {extraer una bola roja en la primera de las tres extracciones},

R_2 = {extraer una bola roja en la segunda de las tres extracciones},

R_3 = {extraer una bola roja en la tercera de las tres extracciones},

y sus complementarios R_1^c, R_2^c, R_3^c. Entonces se tiene que $Z^c = R_1^c \cap R_2^c \cap R_3^c$, así pues,

$$P(Z^c) = P(R_1^c) \cdot P(R_2^c/R_1^c) \cdot P(R_3^c/R_1^c \cap R_2^c).$$

R_1^c = (B, E. E), $\quad P(R_1^c) = P(B) \cdot P(E/B) \cdot P(E/B \cap E) = \frac{6}{9} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{7}$,

$R_1^c \cap R_2^c$ = (B, B, E), $\quad P(R_1^c \cap R_2^c) = P(B) \cdot P(B/B) \cdot P(E/B \cap B) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{7}$,

$R_1^c \cap R_2^c \cap R_3^c$ = (B, B, B), $\quad P(R_1^c \cap R_2^c) = P(B) \cdot P(B/B) \cdot P(B/B \cap B) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}$,

$$P(R_2^c/R_1^c) = \frac{P(R_1^c \cap R_2^c)}{P(R_1^c)} = \frac{5}{8}$$ (directamente, esto sale de considerar que hay 5 bolas blancas de un total de 8),

$$P(R_3^c/R_1^c \cap R_2^c) = \frac{P(R_1^c \cap R_2^c \cap R_3^c)}{P(R_1^c \cap R_2^c)} = \frac{4}{7}$$ (se considera que hay 4 bolas blancas de un total de 7).

Luego, $P(Z^c) = P(R_1^c) \cdot P(R_2^c/R_1^c) \cdot P(R_3^c/R_1^c \cap R_2^c) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$ (obsérvese sucesivas composiciones de la urna: primero 6 bolas blancas y 3 rojas, segundo 5 bolas blancas y 3 rojas, tercero 4 bolas blancas y 3 rojas), y

$$P(Z) = 1 - P(Z^c) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.$$

Problema 9

En una urna hay 9 bolas rojas, 5 bolas blancas y 4 negras. Se extrae una bola y a continuación se extrae otra bola. Estudiar la probabilidad de que la segunda bola no sea negra.

Solución. Se consideran los sucesos: A_r = {extraer una bola roja en la primera extracción. A_b = {extraer una bola blanca en la primera extracción}, A_n = {extraer una bola negra en la primera extracción} y N = {extraer una bola negra en la segunda extracción}.

El suceso a estudiar es $Z = (A_r \cap N^c) \cup (A_b \cap N^c) \cup (A_n \cap N^c)$,

y como A_r, A_b y A_n tienen intersección vacía, entonces $A_r \cap N^c$, $A_b \cap N^c$ y $A_n \cap N^c$ también tienen intersección vacía. Así pues,

$$P(Z) = P(A_r \cap N^c) + P(A_b \cap N^c) + P(A_n \cap N^c).$$

Por otro lado se tiene:

$P(A_r \cap N^c) = P(A_r) \cdot P(N^c/A_r) = \frac{9}{18} \cdot \frac{13}{17} = \frac{13}{34}$ (puesto que hay 9 bolas rojas de un total de 18 inicialmente y luego quedan 13 bolas no negras de un total de 17),

$P(A_b \cap N^c) = P(A_b) \cdot P(N^c/A_b) = \frac{5}{18} \cdot \frac{13}{17} = \frac{65}{306}$ (puesto que hay 5 bolas blancas de un total de 18 inicialmente y luego quedan 13 bolas no negras de un total de 17),

$P(A_n \cap N^c) = P(A_n) \cdot P(N^c/A_n) = \frac{4}{18} \cdot \frac{14}{17} = \frac{28}{153}$ (puesto que hay 4 bolas negras de un total de 18 inicialmente y luego quedan 14 bolas no negras de un total de 17),

luego, $P(Z) = P(A_r \cap N^c) + P(A_b \cap N^c) + P(A_n \cap N^c) = \frac{13}{34} + \frac{65}{306} + \frac{28}{153} = \frac{7}{9}$.

Problema 10

Tres cazadores disparan sobre una misma pieza la cual cae abatida con dos impactos en su cuerpo. La probabilidad de que cada cazador haga blanco es de $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{5}$ respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que quien halla fallado el blanco sea el mejor tirador?

Solución. Se consideran los sucesos:

A_1 = {hacer blanco el primer cazador de un disparo}, $P(A_1) = \frac{4}{5}$.

A_2 = {hacer blanco el segundo cazador de un disparo}, $P(A_2) = \frac{3}{5}$.

A_3 = {hacer blanco el tercer cazador de un disparo}, $P(A_3) = \frac{2}{5}$.

B = {hacer dos blancos al disparar los tres cazadores}.

El suceso B se describe de la siguiente forma:

$$B = (A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c),$$

y como los sucesos A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces

$$P(B) = P(A_1^c) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2^c) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3^c) =$$

$$= (1 - \frac{4}{5}) \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{3}{5}) \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot (1 - \frac{2}{5}) = \frac{58}{125}.$$

La probabilidad que se solicita es $P(A_1^c/B)$, es decir, la probabilidad de que falle el primer cazador supuesto que se han realizado dos blancos.

$$P(A_1^c/B) = \frac{P(A_1^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)}{P(B)} = \frac{P(A_1^c) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)}{P(B)}$$

$$= \frac{(1-\frac{4}{5})\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{58}{125}} = \frac{\frac{6}{125}}{\frac{58}{125}} = \frac{3}{29}.$$

TEMA 6

Estadística descriptiva

Todos los datos expresados en este tema han sido realizados con una Hoja de Cálculo, por ello, puede ocurrir que cambie algún decimal si usted opera con una calculadora científica.

Problema 1

Un alumno ha realizado veinte ejercicios a lo largo de un curso, que fueron calificados con:

5, 6, 3, 9, 4, 1, 2, 7, 3, 2, 1, 9, 3, 0, 6, 1, 9, 8, 5, 6

a) Construir una tabla de frecuencias absolutas y decir cuál es la calificación moda y cuál la mediana.

b) ¿Cuál es la proporción de ejercicios suspendidos?

c) Determinar su nota global si todas las notas tienen el mismo peso en la calificación.

Solución.

a) Construimos una tabla que consta de tres columnas;

en la primera se ponen los valores (nota),

en la segunda las veces que ha salido cada valor (frecuencia absoluta) y

en las tercera las veces que ha salido un valor menor o igual al de la fila donde se está mirando (frecuencia absoluta acumulada).

En este caso la moda, que es el valor de frecuencia absoluta o relativa máxima, es decir, el valor que ha salido más veces, no es única pues hay varios valores que tienen frecuencia absoluta máxima, 1, 3, 6 y 9. Todos ellos han salido tres veces.

La mediana, que es el valor que divide a las frecuencias absolutas acumuladas en dos partes iguales, es el valor 5. Hasta él se acumulan 12 valores y después de él otros 12.

El rango de notas obtenido por el alumno es el conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Veamos a continuación la tabla de frecuencias

nota x_i	frecuencias absolutas n_i	frecuencias absolutas acumuladas
0	1	1
1	3	4
2	2	6
3	3	9
4	1	10
5	2	12
6	3	15
7	1	16
8	1	17
9	3	20
N	20	

b) La frecuencia absoluta acumulada de la nota 4 es 10, así pues, Proporción $= \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

c) Consideramos como nota global la nota media obtenida por el alumno

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{9} x_i n_i = \frac{1}{20}(0\cdot1+1\cdot3+2\cdot2+3\cdot3+4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3+7\cdot1+8\cdot1+9\cdot3)=\frac{90}{20}=\frac{9}{2}=4'5.$$

Problema 2

La altura de un edificio de 30m de altura es estimada por un grupo de personas, y con estas estimaciones se calcula la altura estimada media. Estudiar la altura media en los siguientes casos.

a) Consultadas 24 personas respondieron:

3personas-20m; 6personas-25m; 10personas-30m; 3personas-40m; 2personas-45m.

b) Consultadas 98 personas respondieron:

4personas-10m; 2personas-15m; 6personas-20m; 10personas-25m; 50personas-30m; 13personas-35m; 9personas-40m; 3personas-45m; 1persona-50m;.

Solución.

a) Construimos una tabla de frecuencias absolutas

x_i	n_i	$x_i n_i$
20	3	60
25	6	150
30	10	300
40	3	120
45	2	90
Sumas	24	720

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} x_i n_i = \frac{720}{24} = 30.$$

b) Procedemos de forma análoga al anterior apartado

x_i	n_i	$x_i n_i$
10	4	40
15	2	30
20	6	120
25	10	250
30	50	1500
35	13	455
40	9	360
45	3	135
50	1	50
Sumas	98	2940

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{8} x_i n_i = \frac{2940}{98} = 30.$$

Problema 3

Consultadas numerosas personas sobre la altura de una torre se obtuvieron las siguientes respuestas, {10m, 15m, 20m, 25m, 30m, 35m, 40m, 45m, 50m} con los siguientes porcentajes 2%, 5%, 8%, 16%, 35%, 20%, 7%, 2% y 5% respectivamente. Determinar la altura media, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Solución. Como el porcentaje de un valor indica las veces que se dijo dicho valor en cada 100 preguntas, entonces se tiene que la frecuencia relativa de ese valor es el porcentaje dividido por 100. Así pues, construimos la tabla de frecuencias relativas

x_i	$\%\, x_i$	f_i	$x_i f_i$	$\lvert\langle x\rangle - x_i\rvert$	$\lvert\langle x\rangle - x_i\rvert f_i$	$(\langle x\rangle - x_i)^2$	$(\langle x\rangle - x_i)^2 f_i$
10	2%	0´02	0´2	20´25	0´405	410´0625	8´20125
15	5%	0´05	0´75	15´25	0´7625	232´5625	11´62812
20	8%	0´08	1´6	10´25	0´82	105´0625	8´405
25	16%	0´16	4	5´25	0´84	27´5625	4´41
30	35%	0´35	10´5	0´25	0´0875	0´0625	0´021875
35	20%	0´2	7	4´75	0´95	22´5625	4´5125
40	7%	0´07	2´8	9´75	0´6825	95´0625	6´654375
45	2%	0´02	0´9	14´75	0´295	217´5625	4´35125
50	5%	0´05	2´5	19´75	0´9875	390´0625	19´50312
$\sum$	100 %	1	30´25		5´83		67´6875
			media		desviación media		varianza

En este caso como se construye una tabla con las frecuencias relativas, entonces se obtiene directamente la media , la desviación media y la varianza directamente en la tabla. A continuación describimos estas medidas con expresiones que están referidas a las frecuencias relativas.

La media $\langle x\rangle = \sum_{i=0}^{8} x_i f_i = 30´25$, la desviación media $DM = \sum_{i=0}^{8} \lvert x_i - \langle x\rangle\rvert f_i = 5´83$,

la varianza $\sigma^2 = \sum_{i=0}^{8} (x_i - \langle x\rangle)^2 f_i = 67´6875$,

la desviación típica $\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{8} (x_i - \langle x\rangle)^2 f_i} = 8´227241$.

Problema 4

Un profesor pregunta a sus alumnos cuanto tiempo les ha ocupado entender el anterior Problema 3, y éste anota las siguientes respuestas

minutos	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
n° alumnos	30	46	85	66	30	14	10	10	5	5	3	1

Determinar la media de tiempo empleado para entender el problema, la desviación media, la varianza y la desviación típica. ¿Cuánto tiempo es razonable que se ofrezca para hacer un problema de éstos en un examen?

Solución. Construimos una tabla de frecuencias absolutas

x_i	n_i	$x_i n_i$	$\lvert<x> - x_i\rvert$	$\lvert<x> - x_i\rvert n_i$	$(<x> - x_i)^2$	$(<x> - x_i)^2 n_i$
5	30	150	14´09836	422´9508	198´7637	5962´913
10	46	460	9´098360	418´5245	82´78016	3807´887
15	85	1275	4´098360	348´3606	16´79656	1427´707
20	66	1320	0´901639	59´50819	0´812953	53´65493
25	30	750	5´901639	177´0491	34´82934	1044´880
30	14	420	10´90163	152´6229	118´8457	1663´840
35	10	350	15´90163	159´0163	252´8621	2528´621
40	10	400	20´90163	209´0163	436´8785	4368´785
45	5	225	25´90163	129´5081	670´8949	3354´474
50	5	250	30´90163	154´5081	954´9113	4774´556
55	3	165	35´90163	107´7049	1288´927	3866´783
60	1	60	40´90163	40´90163	1672´944	1672´944
$\sum$	305	5825		2379´672		34527´04

En este caso como se construye una tabla con las frecuencias absolutas, entonces para obtener la media , la desviación media y la varianza se toman las sumas de la tabla de las correspondientes columnas y se divide por el número de casos considerados. A continuación

describimos estas medidas con expresiones que están referidas a las frecuencias absolutas.

$$\text{(media)}\quad \langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{11} x_i n_i = \frac{5825}{305} = 19'0836\ ,$$

$$\text{(desviación media)}\quad DM = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{11} |x_i - \langle x\rangle| n_i = 7'802203,$$

$$\text{(varianza)}\quad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{11} (x_i - \langle x\rangle)^2 n_i = 113'2034\ ,$$

$$\text{(desviación típica)}\quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{11} (x_i - \langle x\rangle)^2 n_i} = 10'63971\ .$$

Dado que la media es aproximadamente 19 y la desviación típica aproximadamente 11, el profesor comprende que el grueso de sus alumnos terminarán el problema de este tipo entre un tiempo mínimo de 8 minutos y un tiempo máximo de 30. Debería dedicar 30 minutos.

Problema 5

Un empresario decide analizar la ocupación de un aparcamiento público, para ello, realiza el siguiente recuento de datos:

tiempo	0m a 30m	30m a 1h	1h a 1h30m	1h30m a 2h	2h a 4h	4h a 6h	6h a 10h
coches	200	450	600	700	500	200	50

Analizar esta tabla de datos calculando la ocupación media, la desviación a la media y la desviación típica.

Solución. El rango de valores que recorre la ocupación de un vehículo es el intervalo de tiempo [0,10] (en horas), entonces discretizamos este rango; construimos otro rango en el cual sólo haya un número de posibles valores de la ocupación. El intervalo [0,10] se expresa como

$$[0,10] = [0,\tfrac{1}{2}] \cup (\tfrac{1}{2},1] \cup (1,\tfrac{3}{2}] \cup (\tfrac{3}{2},2] \cup (2,4] \cup (4,6] \cup [6,10]\ ,$$

así pues, para cada subintervalo se considera el punto medio de éste expresado en minutos.

continuo	[0,30]	(30,60]	(60,90]	(90,120]	(120,240]	(240,360]	(360,600]
discreto	15m	45m	75m	105m	180m	300m	480m

Construimos ahora la siguiente tabla de frecuencias absolutas

x_i	n_i	$x_i n_i$	$\lvert\langle x\rangle - x_i\rvert$	$\lvert\langle x\rangle - x_i\rvert n_i$	$(\langle x\rangle - x_i)^2$	$(\langle x\rangle - x_i)^2 n_i$
15	200	3000	101´94	20388´89	10392´67	2078533´95
45	450	20250	71´94	32375	5176	2329201´39
75	600	45000	41´94	25166´67	1759´34	1055601´85
105	700	73500	11´94	8361´11	142´67	99868´83
180	500	90000	63´06	31527´78	3976	1988001´54
300	200	60000	183´06	36611´11	335009´34	6701867´28
480	50	24000	363´06	18152´78	131809´34	6590466´82
$\sum$	2700	315750		172583´33		20843541´67

A continuación describimos las medidas con expresiones que están referidas a las frecuencias absolutas.

$$\text{(media)}\quad \langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{6} x_i n_i = \frac{315750}{2700} = 116´94 \text{ minutos},$$

$$\text{(desviación media)}\quad DM = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{6} \lvert x_i - \langle x\rangle\rvert\, n_i = 63´92,$$

$$\text{(varianza)}\quad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{6} (x_i - \langle x\rangle)^2 n_i = 7719´83,$$

$$\text{(desviación típica)}\quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{6} (x_i - \langle x\rangle)^2 n_i} = 87´86.$$

Problema 6

Al considerar el edificio del Problema 2 y los datos a partir de los dos grupo de personas, estudiar cuál de los dos grupos estuvo más acertado.

Grupo A: Consultadas 24 personas respondieron:

3personas-20m; 6personas-25m; 10personas-30m; 3personas-40m; 2personas-45m.

Grupo B: Consultadas 98 personas respondieron:

4personas-10m; 2personas-15m; 6personas-20m; 10personas-25m; 50personas-30m; 13personas-35m; 9personas-40m; 3personas-45m; 1personas-50m;.

Solución. Construimos una tabla de frecuencias absolutas del grupo A

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
20	3	60	400	1200
25	6	150	625	3750
30	10	300	900	9000
40	3	120	1600	4800
45	2	90	2025	4050
$\sum$	24	720		22800

A continuación describimos las medidas con expresiones que están referidas a las frecuencias absolutas.

$$\langle x\rangle_A = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} x_i n_i = \frac{720}{24} = 30,$$

$$\sigma^2_A = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} x_i^2 n_i - \langle x\rangle_A^2 = \frac{22800}{24} - 30^2 = 50,$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{4} x_i^2 n_i - \langle x\rangle_A^2} = 7'07.$$

El coeficiente de variación del grupo A es:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\langle x\rangle_A} = 0'235702.$$

Procedemos de forma análoga con el grupo B.

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
10	4	40	100	400
15	2	30	225	450
20	6	120	400	2400
25	10	250	625	6250
30	50	1500	900	45000
35	13	455	1225	15925
40	9	360	1600	14400
45	3	135	2025	6075
50	1	50	2500	2500
$\sum$	98	2940		93400

$$\langle x\rangle_B = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{8} x_i n_i = \frac{2940}{98} = 30,$$

$$\sigma^2_B = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{8} x_i^2 n_i - \langle x\rangle_B^2 = \frac{93400}{98} - 30^2 = 53'06, \quad \sigma_B = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{8} x_i^2 n_i - \langle x\rangle_B^2} = 7'28.$$

El coeficiente de variación del grupo B es: $CV_B = \dfrac{\sigma_B}{\langle x\rangle_B} = 0'24281.$

Así pues, se tiene que el grupo A es más homogéneo que el grupo B puesto que tiene menor coeficiente de variación.

$$CV_A = 0'235702 < CV_B = 0'24281.$$

Sin duda el grupo A lo hizo mejor.

Problema 7

Se realizan tres carreras de 1500m lisos obteniéndose los siguientes tiempos medios 4' 15'', 4' 05'' y 4' 10'' con las respectivas desviaciones típicas de 30'', 15'' y 24''. Tres corredores

que participan en estas tres carreras obtienen los siguientes tiempos

Carrera	Corredor 1	Corredor 2	Corredor 3
1ª	4' 10''	3' 50''	4' 07''
2ª	4' 15''	4' 20''	3' 59''
3ª	3' 55''	4' 09''	4' 24''

Determinar cual de los tres corredores hizo mejor las tres carreras y cual fue más regular.

Solución. Inicialmente reescribimos las marcas de los corredores expresadas en segundos para poder actuar sobre ellas.

Media	Desviación	Carrera	Corredor 1	Corredor 2	Corredor 3
255	30	1ª	250	230	247
245	15	2ª	255	260	239
250	24	3ª	235	249	264

A continuación se tipifican las marcas de los corredores

Carrera	Corredor 1	Corredor 2	Corredor 3
1ª	-0´166666	-0´833333	-0´266666
2ª	0´666666	1	-0´4
3ª	-0´625	-0´041666	0´583333
$\sum$	-0´125	0´125	-0´083333
Media carreras	-0´041666	0´041666	-0´027777
Desviación típica carreras	0´534677	0´750771	0´435535

Con la marca media de cada corredor se comprueba que el primero posee la media más pequeña, luego, es el ganador. Sin embargo, es el tercero el que tiene una desviación típica menor, es decir, sus marcas son más homogéneas lo cuál le convierte en el más regular.

TEMA 7

Sistemas de ecuaciones lineales

Problema 1

Determinar cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones están constituidos por ecuaciones lineales. De éstos, indicar el número de ecuaciones y el número de incógnitas.

a) $x + 3y - 0'7z = 7$

b) $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + y \cdot t = 7 \\ z + t = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ x^2 + 2y + z^2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ x + \frac{1}{2}y + 0'3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + t = 10 \\ y + z - t = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ y - z + t = 4 \end{cases}$

Solución.

a) Este sistema está compuesto por una única ecuación lineal con tres incógnitas (x, y, z son las incógnitas) puesto que no aparecen ni potencias, ni productos, ni cocientes de incógnitas.

b) Este sistema tiene la segunda ecuación no lineal puesto que aparece el producto (x+y.t=7 donde x, y, z, t son incógnitas) de incógnitas.

c) La segunda ecuación del sistema no es una ecuación lineal pues posee potencias (cuadrados de x y de z, donde las incógnitas son x, y, z) de alguna incógnita.

d) Cada una de las ecuaciones de este sistema es lineal (no aparecen ni potencias ni productos con incógnitas), así pues, es un sistema de dos ecuaciones con (x, y, z) tres incógnitas.

e) La segunda ecuación no es lineal (posee un producto de las incógnitas x, y).

f) Cada una de las ecuaciones de este sistema es lineal (no aparecen ni potencias ni productos con incógnitas), así pues, es un sistema de cuatro ecuaciones con (x, y, x, t) cuatro incógnitas.

Problema 2

Determinar cuáles de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles, y cuáles son incompatibles.

a) $x + 3y + z = 7$

b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z=2 \\ z=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ \frac{1}{2}x+y+0'3z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=7 \\ -x+2y=7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=y+2 \\ x+y=x+3 \\ x+y=7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 2x+y-z=3 \\ y+z=7 \\ z=2 \end{cases}$

Solución.

a) Se trata de un sistema de una ecuación con tres incógnitas que es compatible, puesto que existe solución para el sistema. Para comprobar esto basta considerar que y toma el valor 2 y que z toma el valor 0, entonces x debe tomar el valor 1. Es decir $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ es una solución del sistema. Existen más soluciones de este sistema, por ejemplo $x = 7$, $y = 0$, $z = 0$. Concretamente, basta tomar cualquier par de números α y β, entonces $x = 7 - \beta - 3\alpha$, $y = \alpha$, $z = \beta$, es una solución del sistema. Así pues, el sistema es compatible e indeterminado.

b) El sistema posee solución (Si $z = 4$, entonces $y = -2$. Además, si $z = 4$ e $y = -2$, entonces $x = 1$) y esta es única: $x = 1$, $y = -2$, $z = 4$. Así pues, el sistema es compatible y determinado.

c) El sistema posee solución, por ejemplo, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Luego, se trata de un sistema compatible.

El sistema posee más soluciones, para ver esto basta considerar $z = 0$ y se obtienen las ecuaciones

$$x + 2y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}x + y = 0$$

de las cuales los valores $x = 2$ e $y = -1$ las verifican. Es más, para cualquier número α se tiene que $x = 2\alpha$, $y = -\alpha$, $z = 0$ son solución del sistema. Así pues, se trata de un sistema compatible e indeterminado.

d) Los valores de x e y que verifican las dos primeras ecuaciones se obtienen al resolver

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 2x-7=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 2x-7=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 3x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{5}{3} \\ x=\frac{8}{3} \end{cases}$$

por tanto, los dos únicos números que verifican estas ecuaciones son $x = \frac{8}{3}$ e $y = -\frac{5}{3}$.

Los valores de x e y que verifican las dos últimas ecuaciones se obtienen al resolver

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7 = y \\ 2y = 7 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7 = y \\ 2(2x - 7) = 7 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 3x = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 7 \end{cases}$$

por tanto, los únicos números que verifican estas ecuaciones son: $x = 7$ e $y = 7$.

Así pues, no existe ningún par de números que verifiquen las tres ecuaciones, es decir, el sistema es incompatible.

e) De la primera ecuación se obtiene que $x = 2$ y de la segunda que $y = 3$. Sin embargo, estos dos valores no verifican la tercera ecuación (pues $x = 2$, $y = 3$, $2 + 3 \neq 7$). Este sistema es incompatible.

f) De la última ecuación se tiene que $z = 2$, de la penúltima (una vez que se sabe que $z = 2$) se obtiene que $y = 5$, de la segunda (una vez que se sabe que $z = 2$ e $y = 5$) se obtiene $x = 0$. Ahora bien, $x = 0$, $y = 5$ y $z = 2$ no verifican la primera ecuación, puesto que $0 + 5 + 2 \cdot 2 \neq 7$. Así pues, este sistema es incompatible.

Problema 3

Estudiar cuáles de los siguientes pares de sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{6} \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ -5y + 5z = -5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = 7 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$.

Solución.

a) Al multiplicar la primera ecuación por 2 se obtiene un sistema equivalente al primero

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \quad ((2 \cdot E1)\ 2(x + y + z) = 2 \cdot 2) \quad \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases},$$

y al multiplicar nuevamente por $\frac{1}{6}$ la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ \frac{2}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{3}{6}z = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Si se multiplica la segunda ecuación por -1, se obtiene el segundo sistema.

Conclusión: Son dos sistemas equivalentes.

b) La primera ecuación de los dos sistemas es la misma y la segunda ecuación del segundo sistema es la suma de las dos primeras del primer sistema;

$(x+y+z=2)+(x+2y-z=3)$ que significa $(x+y+z)+(x+2y-z)=2+3$.

La tercera ecuación del segundo sistemas es la tercera ecuación menos dos veces la segunda ecuación del primer sistema; $-2(x+2y-z=3)+(2x-y+3z=1)=-5y+5z=-5$.

Conclusión: Son sistemas equivalentes.

c) En el primer sistema se observa que la tercera ecuación es la suma de dos veces la primera ecuación y de la segunda ecuación. Así pues, cualquier par de valores que verifiquen las dos primeras ecuaciones también deben verificar la tercera. Por lo tanto, el sistema de tres ecuaciones es equivalente al siguiente sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

El segundo sistema se obtiene al multiplicar por dos la segunda ecuación del anterior sistema.

Conclusión: Son dos sistemas equivalentes.

Problema 4

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x-y+3z=1 \end{cases}$

Solución.

a) Resolvemos el sistema por el método de sustitución, (de una de las ecuaciones se despeja una incógnita) de $2x+y=7$ se obtiene $y=7-2x$ y (se sustituye esta incógnita en la otra ecuación obteniéndose una ecuación con una única incógnita) al sustituir y por $7-2x$ en la ecuación $x-3y=2$ se tiene:

$$x-3(7-2x)=2 \Rightarrow x-21+6x=2 \Rightarrow 7x=23 \Rightarrow x=\frac{23}{7}.$$

Así pues, $y=7-2\left(\frac{23}{7}\right)=\frac{3}{7}$ (se obtiene el valor de y al sustituir en $y=7-2x$ el valor obtenido de x).

El proceso de transformaciones realizadas con el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x - 3(7 - 2x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ 7x = 23 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2\left(\frac{23}{7}\right) \\ x = \frac{23}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{7} \\ x = \frac{23}{7} \end{cases}.$$

Así pues, la única solución del sistema es $x = \frac{23}{7}$, $y = \frac{3}{7}$.

b) Resolvemos el sistema por el método de igualación, (de las ecuaciones se despeja una misma incógnita y se igualan las expresiones obtenidas construyéndose una ecuación en una incógnita):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 - 2y}{3} \\ x = \frac{3 + y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5 - 2y}{3} = \frac{3 + y}{2} \\ x = \frac{3 + y}{2} \end{cases}.$$

Se resuelve la primera ecuación en una incógnita en el último sistema

$$\frac{5 - 2y}{3} = \frac{3 + y}{2} \Rightarrow 2(5 - 2y) = 3(3 + y) \Rightarrow 10 - 4y = 9 + 3y \Rightarrow y = \frac{1}{7},$$

y al sustituir el valor de y en la segunda ecuación, $x = \frac{3 + y}{2}$, obtenemos $x = \frac{11}{7}$. Así pues, la única solución del sistema es $x = \frac{11}{7}$, $y = \frac{1}{7}$.

c) Resolvemos el sistema por sustitución (utilizamos la incógnita más fácil de despejar en alguna ecuación).

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x - y + 3z = 2 \\ y = 1 - 2x + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2(1 - 2x + z) + z = 4 \\ x - (1 - 2x + z) + 3z = 2 \\ y = 1 - 2x + z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 3x + 2z = 3 \\ y = 1 - 2x + z \end{cases}.$$

Las dos primeras ecuaciones constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Ahora se resuelve este sistema:

$$\begin{cases} -x + 3z = 2 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z - 2 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z - 2 \\ 3(3z - 2) + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3z - 2 \\ 11z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{11} \\ z = \frac{9}{11} \end{cases}.$$

Basta sustituir en la ecuación $y = 1 - 2x + z$, los valores $x = \frac{5}{11}$ y $z = \frac{9}{11}$ para obtener $y = \frac{10}{11}$. Así pues, la única solución del sistema es $x = \frac{5}{11}$, $z = \frac{9}{11}$, $y = \frac{10}{11}$.

d) El sistema tiene más incógnitas que ecuaciones. Consideremos una ecuación más, por ejemplo, $z = \alpha$ donde α representa a un determinado número real.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x - y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 - \alpha \\ x - y = 1 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 - \alpha \\ x = 1 - 3\alpha + y \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3(1 - 3\alpha + y) + 2y = 4 - \alpha \\ x = 1 - 3\alpha + y \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 9\alpha + 3y + 2y = 4 - \alpha \\ x = 1 - 3\alpha + y \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = 1 + 8\alpha \\ x = 1 - 3\alpha + y \\ z = \alpha \end{cases}.$$

Así pues, $x = \frac{6}{5} - \frac{7}{5}\alpha$, $y = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}\alpha$, $z = \alpha$ son las soluciones del sistema. (Existen infinitas soluciones del sistema, basta cambiar el valor que toma el parámetro α para encontrar varias ternas de números que verifican las dos ecuaciones del sistema). Este es un sistema compatible indeterminado.

Problema 5

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 10 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \\ 4x + 4y - 3z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$

Solución.

a) Para resolver este sistema empleamos el método de reducción (este se basa en utilizar las propiedades de transformación de un sistema en sistemas equivalentes). Se desea transformar el sistema en otro equivalente que posea una ecuación en una única incógnita. En este caso, el sistema formado por la ecuación primera, E_1 $(2x + 3y = 1)$, y la ecuación segunda, E_2 $(-x + 2y = 3)$, es equivalente al sistema formado por las ecuaciones $E_1 + 2\ E_2$ y E_2, donde la ecuación $E_1 + 2 \cdot E_2$ se expresa como $(2x + 3y = 1) + 2(-x + 2y = 3)$, es decir, como

$$2x + 3y - 2x + 4y = 1 + 6 \quad \text{o} \quad 7y = 7.$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Así pues, la única solución del sistema es $x = -1,\ y = 1$.

b) Resolvemos este sistema nuevamente por el método de reducción. Con la notación $E_3=E_3-2E_1$ representamos la sustitución de la ecuación tercera por la resta de la tercera ecuación menos dos veces la primera ecuación.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=10 \\ 3x-2y+2z=9 \\ 4x+4y-3z=2 \end{cases} \overset{(E_3 \approx E_3-2E_1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x+3y+4z=10 \\ 3x-2y+2z=9 \\ -2y-11z=-18 \end{cases}$$

$$\overset{(E_2=2E_2-3E_1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x+3y+4z=10 \\ -13y-8z=-12 \\ -2y-11z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-\frac{3}{2}y-2z \\ -13y-8z=-12 \\ -2y-11z=-18 \end{cases}$$

Para conocer la solución del sistema formado por las ecuaciones E_1,E_2,E_3 debemos conocer primero la solución del sistema:

$$\begin{cases} -13y-8z=-12 \\ -2y-11z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13y+8z=12 \\ 2y+11z=18 \end{cases} \overset{(E_1=2E_1-13E_2)}{\Rightarrow} \begin{cases} -127z=-210 \\ 2y+11z=18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{210}{127} \\ y=9-\frac{11}{2}z=-\frac{12}{127} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{210}{127} \\ y=-\frac{12}{127} \end{cases}$$

Así pues, la única solución del sistema inicial es :

$$x = 5-\frac{3}{2}\left(-\frac{12}{127}\right)-2\frac{210}{127} = \frac{233}{127},\ y = -\frac{12}{127},\ z = \frac{210}{127}.$$

c) Intentamos resolver este sistema por reducción:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases} \overset{(E_2 \approx E_2-2E_1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+2z=1 \\ -5y-5z=1 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases}$$

$$\overset{(E_3=E_3-3E_1)}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y+2z=1 \\ -5y-5z=1 \\ -5y-5z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 5y+5z=-1 \end{cases}$$

Como hay más incógnitas que ecuaciones, entonces alguna variable toma el valor α,

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 5y+5z=-1 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-2z \\ y=-\dfrac{1}{5}-z \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{5}-\alpha \\ y=-\dfrac{1}{5}-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado.

d) Si intentamos resolver este sistema por reducción.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases} \begin{matrix} (E_2=E_2-2E_1) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x+y=1 \\ -3x=1 \\ 3x-3y=2 \end{cases} \begin{matrix} (E_3\approx E_3+3E_1) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 2x+y=1 \\ x=-\dfrac{1}{3} \\ 9x=5 \end{cases}$$

se produce una contradicción $x=-\frac{1}{3}$ y $x=\frac{5}{9}$. Así pues, el sistema es incompatible.

Problema 6

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 5x-5y-6z=5 \\ 5x+3y-z=10 \\ 3x+2y+7z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-4y+2z-t=3 \\ 3x-12y+6z-3t=7 \\ y+3z-t=-2 \\ 2x-y+t=4 \end{cases}$

Solución. El método de Gauss consiste en transformar el sistema en otro equivalente tal que posee una ecuación en una única incógnita, otra con dos únicas incógnitas, otra con tres únicas incógnitas, y así sucesivamente. La transformación se hace paso a paso construyendo una cadena de sistemas equivalentes los cuales difieren del anterior en una única ecuación.

a) Si se cambia el orden de escritura de las incógnitas se obtiene un sistema equivalente y si se cambia el orden de escritura de las ecuaciones se obtiene otro sistema equivalente.

$$\begin{cases} 5x-5y-6z=5 \\ 5x+3y-z=10 \\ 3x+2y+7z=2 \end{cases}$$ (se cambia el orden de las incógnitas para escribir números pequeños en primer lugar),

$$\begin{cases} -6z+5x-5y=5 \\ -z+5x+3y=10 \\ 7z+3x+2y=2 \end{cases}$$ (se cambia el orden de las ecuaciones para escribir los números pequeños arriba),

$$\begin{cases} -z+5x+3y=10 \\ -6z+5x-5y=5 \\ 7z+3x+2y=2 \end{cases} \begin{matrix} (E_3\approx E_3+7E_1) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -z+5x+3y=10 \\ -6z+5x-5y=5 \\ 38x+23y=72 \end{cases} \begin{matrix} (E_2\approx E_2-6E_1) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -z+5x+3y=10 \\ -25x-23y=-55 \\ 38x+23y=72 \end{cases}$$ (se han conseguido coeficientes cero para la z en las dos últimas ecuaciones).

Cambiamos el orden de las variables nuevamente,

$$\begin{cases} -z+3y+5x=10 \\ 23y+25x=55 \\ 23y+38x=72 \end{cases} \quad (E_3 = E_3 - E_2) \Rightarrow \quad \begin{cases} -z+3y+5x=10 \\ 23y+25x=55 \\ 13x=17 \end{cases}$$ (se ha conseguido un sistema

que posee una ecuación con una incógnita, otra con dos incógnitas y otra con tres incógnitas). Se resuelve este sistema

$$\begin{cases} z=3y+5x-10 \\ y=\dfrac{55}{23}-\dfrac{25}{23}x \\ x=\dfrac{17}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{165}{299} \\ y=\dfrac{290}{299} \\ x=\dfrac{17}{13} \end{cases}.$$

b) Análogamente,

$$\begin{cases} x-4y+2z-t=3 \\ 3x-12y+6z-3t=7 \\ y+3z-t=-2 \\ 2x-y+t=4 \end{cases}$$ (cambiamos orden de ecuaciones) $$\begin{cases} x-4y+2z-t=3 \\ 2x-y+t=4 \\ 3x-12y+6z-3t=7 \\ y+3z-t=-2 \end{cases}$$

$$(E_2 = E_2 - 2E_1) \quad (E_3 = E_3 - 3E_1) \Rightarrow \quad \begin{cases} x-4y+2z-t=3 \\ 7y-4z+3t=-2 \\ 0=-2 \\ y+3z-t=-2 \end{cases}.$$

Se ha producido la aparición de una igualdad absurda $(0=-2)$, así pues, este sistema no posee solución. Es decir es un sistema incompatible.

Problema 7

Resolver el sistema de ecuaciones $$\begin{cases} x+2y+3z+u=9 \\ x+3y+2u=7 \\ 2x-z+3u=2 \\ 3x+2y-z+u=11 \end{cases}.$$

Solución. Aplicamos el método de Gauss expresando el sistema de ecuaciones mediante la

matriz de coeficientes ampliada con los términos independientes.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1&9\\1&3&0&2&7\\2&0&-1&3&2\\3&2&-1&1&11\end{bmatrix} \begin{matrix}(E_2=E_2-E_1)\\ \Rightarrow \\ (E_3=E_3-2E_1)\\(E_4=E_4-3E_1)\end{matrix} \begin{bmatrix}1&2&3&1&9\\0&1&-3&1&-2\\0&-4&-7&1&-16\\0&-4&-10&-2&-16\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ \Rightarrow \\ (E_3=E_3+4E_2)\\(E_4=E_4+4E_2)\end{matrix} \begin{bmatrix}1&2&3&1&9\\0&1&-3&1&-2\\0&0&-19&5&-24\\0&0&-22&2&-24\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \\ (E_4=19E_4-22E_3) \begin{bmatrix}1&2&3&1&9\\0&1&-3&1&-2\\0&0&-19&5&-24\\0&0&0&-72&72\end{bmatrix}$$

Así pues, el sistema del enunciado es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z+u=9\\ y-3z+u=-2\\ -19z+5u=-24\\ -72u=72\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9-2y-3z-u\\ y=-2+3z-u\\ z=\dfrac{-24-5u}{-19}\\ u=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\\ y=2\\ z=1\\ u=-1\end{cases}.$$

Conclusión: El sistema es compatible y determinado con solución $x=3,\ y=2,\ z=1,\ u=-1$.

Problema 8

Estudiar el sistema de ecuaciones dependiendo del valor que tenga el número real α.

$$\begin{cases} \alpha x+y+3z=3\\ x-y-z=0\\ 5x-3y-2z=6\end{cases}.$$

Solución.

Utilizamos el método de Gauss para estudiar las soluciones de la ecuación dependiendo del valor que tenga el número α (α no es una incógnita, sino que es un número, por tanto se trata de un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas x, y, z). Primero reordenamos incógnitas y ecuaciones, para reescribir el sistema de esta forma que se opere con el número α lo menos posible (interesa dejar α como coeficiente de la última variable en la última ecuación).

$$\begin{cases} \alpha x+y+3z=3\\ x-y-z=0\\ 5x-3y-2z=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z+y+\alpha x=3\\ -z-y+x=0\\ -2z-3y+5x=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z-y+x=0\\ -2z-3y+5x=6\\ 3z+y+\alpha x=3\end{cases}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (E_2 \approx E_2 - 2E_1) \\ \Rightarrow \\ (E_3 \approx E_3 + 3E_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 3+\alpha & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (E_3 \approx E_3 - 2E_2) \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Mediante todas las transformaciones hechas al sistema se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{cases} -z - y + x = 0 \\ -y + 3x = 6 \\ (\alpha - 3)x = -9 \end{cases}.$$

En este sistema aparece una expresión absurda si $\alpha = 3$ (concretamente $0 = -9$), luego en este caso se trata de un sistema incompatible.

Si $\alpha \neq 3$, entonces se tiene: $\begin{cases} z \approx x - y \\ y \approx 3x - 6 \\ x \approx \dfrac{-9}{\alpha - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-9}{\alpha - 3} - \dfrac{-9 - 6\alpha}{\alpha - 3} = \dfrac{6\alpha}{\alpha - 3} \\ y = 3\dfrac{-9}{\alpha - 3} - 6 = \dfrac{-9 - 6\alpha}{\alpha - 3} \\ x = \dfrac{-9}{\alpha - 3} \end{cases}$.

Conclusión: Si $\alpha = 3$ el sistema es incompatible, mientras que si $\alpha \neq 3$ el sistema es compatible y determinado.

Problema 9

Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \\ x + 3y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Solución. Aplicamos el método de Gauss al estudio de este sistema. (Inicialmente construimos la matriz de coeficientes ampliada con los términos independientes y realizamos diversas transformaciones con las filas de la matriz).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 \approx F_2 - F_1 \\ \Rightarrow \\ F_3 \approx F_3 - F_1 \\ F_4 \approx F_4 - F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 \approx F_3 - F_2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se observa que las filas tercera y cuarta son proporcionales, así pues, el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es equivalente al siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y - 4z = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - 3z \\ y = 3 + 4z \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Conclusión: El sistema es compatible y determinado. La solución es $x = 6$, $y = -1$, $z = -1$.

Problema 10

De una caja que contiene piezas de dos tipos A, B, se desea determinar su peso y el peso de cada una de las dos piezas. Para ello se sabe:

a) Dos cajas y una pieza A pesan 19 kilogramos.

b) Una pieza A y una caja de la cual se han sacado dos piezas B pesan 6 kilogramos.

c) Tres cajas, una pieza A y tres piezas B pesan 34 kilogramos.

Solución. Si designamos por x el peso de la caja, y el peso de la pieza A y z el peso de la pieza B, entonces los apartados a), b) y c) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a) \\ b) \\ c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 19 \\ x + y - 2z = 6 \\ 3x + y + 3z = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2x = 19 \\ y - 2z + x = 6 \\ y + 3z + 3x = 34 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema por el método de Gauss,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 34 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ \Rightarrow \\ F_3 = F_3 - F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 = 2F_3 + 3F_2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

El sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y + 2x = 19 \\ -2z - x = -13 \\ -x = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 19 - 2x = 1 \\ z = \dfrac{13 - x}{2} = 2 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Conclusión: La caja pesa 9 Kg, una pieza del tipo A pesa 1Kg y una pieza del tipo B pesa 2Kg.

TEMA 8

Matrices y determinantes

Problema 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinar las siguientes matrices:

a) $2A + 3D$

b) $A \cdot B$

c) $C \cdot B$

d) $A^2 - 3D^2$

Solución.

a) El producto del número 2 por la matriz A es: (otra matriz del mismo orden que la matriz A, cuyos elementos son los elementos de la matriz A multiplicados por 2):

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Análogamente, $3 \cdot D = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

La suma de las matrices 2A y 3D es:

(se puede realizar por ser del mismo orden, es una matriz cuyos elementos son la suma de los elementos de las dos matrices)

$$2A + 3D = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6 & 4+15 \\ 2+6 & 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) El producto de las matrices A por B es: (se puede realizar dado que la matriz A es de orden 2x2 y la matriz B es de orden 2x3 y por lo tanto el número de columnas de A (2) coincide con el número de filas de B (2)).

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+2\cdot 1 & 2\cdot 0+2\cdot 2 & 2\cdot 3+2\cdot 5 \\ 1\cdot 1+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 4 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

c) El producto de las matrices C (3x2) por B (2x3) es una matriz de orden 3x3: (se puede multiplicar C por B puesto que el número de columnas de C, 2, es igual al número de filas de B, 2).

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1+2\cdot 1 & 3\cdot 0+2\cdot 2 & 3\cdot 3+2\cdot 5 \\ 1\cdot 1+7\cdot 1 & 1\cdot 0+7\cdot 2 & 1\cdot 3+7\cdot 5 \\ 0\cdot 1+2\cdot 1 & 0\cdot 0+2\cdot 2 & 0\cdot 3+2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 19 \\ 8 & 14 & 38 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

d) La matriz A es cuadrada de orden 2, así pues, A^2 representa al producto $A \cdot A$ y, análogamente, D^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$D^2 = D \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$-3D^2 = -3 \cdot \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & -15 \\ -6 & -33 \end{bmatrix}.$$

Así pues, $A^2 - 3D^2 = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -42 & -15 \\ -6 & -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & -5 \\ -1 & -22 \end{bmatrix}$.

Problema 2

Sea a,b dos números reales, entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

¿ Se pueden utilizar estas igualdades en el supuesto que a y b sean reemplazadas por matrices A y B cuadradas y del mismo orden ?

Solución. La matriz $A+B$ es una matriz cuadrada y del mismo orden que A y que B

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

$$= A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2.$$

En general $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son dos matrices distintas, veamos un ejemplo utilizando las matrices A y D del problema anterior:

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad D \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 19 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Análogamente,

$$(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot A + A\cdot(-B) + B\cdot A + B\cdot(-B)$$
$$= A^2 - (A\cdot B) + B\cdot A - B^2 .$$

Conclusión: Si A y B son matrices, entonces

$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2A\cdot B \quad \text{y} \quad (A^2 - B^2) \neq (A+B)\cdot(A-B) .$$

Problema 3

Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Determinar las siguientes matrices:

a) A^n con $n \in \mathbf{N}$ b) B^n con $n \in \mathbf{N}$ c) C^n con $n \in \mathbf{N}$

Solución.

a) Calculamos inicialmente las primeras potencias de la matriz A:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ (matriz identidad)} .$$

$$A^4 = A\cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A .$$

$$A^5 = A\cdot A^4 = A\cdot A = A^2 .$$

Así pues:

$$A^n = \begin{cases} I & \text{si} \quad n = 3\cdot k \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{N} \\ A & \text{si} \quad n = 3\cdot k+1 \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{N} \\ A^2 & \text{si} \quad n = 3\cdot k+2 \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz B:

$$B^2 = B\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = B .$$

$$B^3 = B\cdot B^2 = B\cdot B = B^2 = B .$$

Así pues, $B^n = B$ para $n \in \mathbf{N}$ (una matriz que verifica que $B^2 = B$ se denomina matriz idempotente).

c) Calculamos las primeras potencias de la matriz C:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (matriz cero o matriz nula)}$$

Así pues, $C^n = 0$ para $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ (una matriz C que verifica que $C^2 = 0$ se denomina matriz nilpotente)

Problema 4

Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución. Para calcular el determinante de la matriz A aplicamos la regla de las diagonales (que únicamente es válida para matrices cuadradas de orden 2):

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (2 \cdot 1) = 4 \text{ . } (|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Para calcular el determinante de la matriz B aplicamos la regla de Sarrous (que únicamente es válida para matrices cuadradas de orden 3).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 5 - (3 \cdot 2 \cdot 3) - (0 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 5 \cdot 5) =$$

$$= 2 + 0 + 15 - 18 - 0 - 25 = -26 .$$

Para calcular el determinante de la matriz C aplicamos el desarrollo por una fila o una columna, concretamente por la primera fila:

$$|C| = \begin{vmatrix} \mathbf{+} & \mathbf{-} & \mathbf{+} & \mathbf{-} \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

(Se tiene en cuenta una regla de signos y a cada elemento se le multiplica por el determinante que queda al suprimir la fila y la columna donde está el elemento).

Calculamos ahora cada uno de los determinantes de orden tres con la regla de Sarrous:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \cdot 5 - ((-2) \cdot 2 \cdot 1) -$$

$$- (2 \cdot 4 \cdot (-4)) - (3 \cdot 1 \cdot 5) = -41 .$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 53 \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -32 .$$

Así pues, $|C| = -41 - 53 + 64 = -30$.

Problema 5

Determinar que valor debe tener el parámetro a para que la siguiente matriz tenga determinante nulo.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Inicialmente se determina el valor del determinante de la matriz A, para ello, desarrollamos el determinante por la segunda columna,

$$|A| = \begin{vmatrix} a^{+} & 1^{-} & 1 & 1 \\ 1 & 1+a^{+} & 1 & 1 \\ 1 & 1^{-} & 2+a & 1 \\ 1 & 1^{+} & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1+a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 \end{vmatrix}$$

El primer y tercer determinante de orden tres es nulo por tener dos columnas iguales.

$$|A| = (1+a)(a^2-1) + (1-a^2) = a(a^2-1) = a^3 - a\,.$$

Para que $|A| = 0$ basta que alguno de los factores $a, a-1, a+1$ se anule,

$$a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2-1) = 0 \Rightarrow a(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Luego, $|A| = 0$ si $a = -1$ o si $a = 0$ o si $a = 1$.

Problema 6

Demostrar que el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal.

Solución. Veamos que es cierto en el caso de las matrices cuadradas diagonales de orden dos.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \;;\; |A| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - 0 = a_1 \cdot a_2\,.$$

Como en este caso es cierto, veamos para de matrices de orden tres:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} ; |A| = \begin{bmatrix} + & - & + \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} = +a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3\,.$$

(Puesto que solo el primer adjunto está multiplicado por un número distinto de cero).

Si se supone que esta afirmación es cierta para matrices de orden n, veamos que también es cierto para matrices de orden $n+1$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a_{n+1} \end{bmatrix} \;;\; |A| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix}\,.$$

Ahora bien, este último determinante es de orden n, luego

$$\begin{vmatrix} a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix} = a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n+1}$$

así pues, $|A| = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1}$.

Como n puede ser cualquier número natural, entonces podemos asegurar la certeza del enunciado. (A esta forma de demostrar una propiedad se le denomina demostración por inducción).

Problema 7

Hallar la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

- Matriz A. Una matriz es inversible si y sólo si posee determinante no nulo. Así pues, calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1 \neq 0 \quad \text{(posee matriz inversa).}$$

A continuación determinamos la matriz adjunta, es decir, aquella cuyos elementos lo constituyen los elementos adjuntos. (El adjunto de un elemento es el valor del determinante que queda al suprimir la fila y la columna donde está situado dicho elemento y con el signo + o - según la regla de signo correspondientes al desarrollo por filas o columnas).

$$A = \begin{bmatrix} 3^{+} & 1^{-} \\ 7^{-} & 2^{+} \end{bmatrix} \; ; \; A_{11} = +2 \; ; \; A_{12} = -7 \; ; \; A_{21} = -1 \; ; \; A_{22} = +3 \, .$$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz adjunta)}$$

Se determina la matriz transpuesta de la matriz adjunta (se cambian filas por columnas):

$$A^{*t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa es la matriz A^{*t} multiplicada por el inverso del determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*t} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Matriz B. Procedemos de forma análoga; se calcula el determinante,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+0+0-0+6+2 = 11 \neq 0 \text{ (posee matriz inversa).}$$

Se determina la matriz adjunta B^* de la matriz B: $B = \begin{bmatrix} 1^{+} & -1^{-} & 0^{+} \\ 2^{-} & 1^{+} & -1^{-} \\ 0^{+} & 2^{-} & 3^{+} \end{bmatrix}$,

$$B_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \; ; \; B_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \; ; \; B_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \; ;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \; ; \; B_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \; ; \; B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \; ;$$

$$B_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; B_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \; .$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; B^{-1} = \frac{1}{|B|} B^{*t} = \frac{1}{11} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}.$$

- Matriz C. Análogamente,

$$|C| = \begin{vmatrix} 0^{+} & 2^{-} & -1^{+} & 0^{-} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \text{ (posee matriz inversa).}$$

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 41 \; ; \; C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 17 \; ; \; C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 18;$$

$$C_{14} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -32 \; ; \; C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \; ; \; C_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \; ; \; C_{24} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; C_{31} = 37 \; ; \; C_{32} = 13 \; ;$$

$$C_{33} = 26 \; ; C_{34} = -32 \; ; \; C_{41} = -15 \; ; \; C_{42} = -7 \; ; \; C_{43} = -14 \; ; \; C_{44} = 16$$

$$C^* = \begin{bmatrix} 41 & 17 & 18 & -32 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 37 & 13 & 26 & -32 \\ -15 & -7 & -14 & 16 \end{bmatrix} \; ; \; C^{-1} = \frac{1}{|C|} C^{*t} = \begin{bmatrix} \frac{41}{16} & \frac{1}{8} & \frac{37}{16} & -\frac{15}{16} \\ \frac{17}{16} & \frac{1}{8} & \frac{13}{16} & -\frac{7}{16} \\ \frac{9}{8} & \frac{1}{4} & \frac{13}{8} & -\frac{7}{8} \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 8

Calcular el determinante de la matriz C del ejercicio anterior haciendo uso de las propiedades de los determinantes (Hacer ceros en una fila o columna).

Solución. La propiedad que utilizamos es que si en una matriz A se sustituye una fila (o columna) por una combinación lineal de filas (o columna) en la que interviene la fila (o columna) sustituida, entonces el determinante de esta nueva matriz es igual al determinante de la matriz A.

Aplicamos esta propiedad de forma que en la primera columna el tercer y cuarto elemento se transformen en cero.

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(F_3 \approx F_3 - 2F_2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -3 & -7 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(F_4 \approx F_4 - 4F_2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -10 & -3 & -7 \\ 0 & -16 & -8 & -13 \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar por la primera columna (y teniendo en cuenta la regla de signos):

$$|C| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -10 & -3 & -7 \\ -16 & -8 & -13 \end{vmatrix} = 16 .$$

Problema 9

Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Solución. Utilizamos el método de hacer ceros en una fila o columna, puesto que, si desarrollamos directamente por una fila o columna, entonces tendríamos que calcular cinco determinantes de orden 4.

Transformamos el determinante de forma que en la primera fila (que está formada por los números más pequeños) todos los elementos sean cero menos el segundo (que es un 1). Para ello, se realizan las siguientes transformaciones:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(C_1 \approx C_1 - 2C_2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & -3 & 3 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(C_4 \approx C_4 + 3C_5)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 5 & 10 & 2 \\ 8 & -3 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{(C_5 \approx C_5 + C_2)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 5 & 10 & 2 \\ 8 & -3 & 3 & 6 & -1 \\ 8 & -2 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 10 & 2 \\ 8 & 3 & 6 & -1 \\ 8 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} . \text{ (Al desarrollar por la primera fila).}$$

En este determinante de orden cuatro hacemos cero en la primera fila igualmente:

$$|A| = -\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 10 & 2 \\ 8 & 3 & 6 & -1 \\ 8 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{(C_2 \approx C_2 - C_3)}{=} -\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 10 & 2 \\ 8 & -3 & 6 & -1 \\ 8 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(C_1 \approx C_1 + 2C_3)}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 27 & -5 & 10 & 2 \\ 20 & -3 & 6 & -1 \\ 16 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \overset{(C_4 \approx C_4 - 2C_3)}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 27 & -5 & 10 & -18 \\ 20 & -3 & 6 & -13 \\ 16 & 0 & 4 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2)\begin{vmatrix} 27 & -5 & -18 \\ 20 & -3 & -13 \\ 16 & 0 & -9 \end{vmatrix}.$$ (Al desarrollar por la primera fila). Así pues, $|A| = -10$.

Problema 10

Dada la matriz A, determinar algún número real k tal que satisfaga la ecuación $|A - k \cdot I| = 0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. La matriz I es la matriz identidad de orden tres (es decir, aquella cuyos términos son cero menos los de la diagonal que son unos), así pues,

$$A - kI = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-k & -2 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ -1 & -1 & 1-k \end{bmatrix}$$

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} 2-k & -2 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ -1 & -1 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= (2-k)(-k)(1-k) - 4 - 2 + 2k - 2(1-k) - 2(2-k) = -k^3 + 3k^2 + 4k - 12.$$

Por lo tanto, se trata de calcular los números reales tales que,

$$-k^3 + 3k^2 + 4k - 12 = 0 \quad \text{o mejor} \quad k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = 0.$$

Al tratar de descomponer en factores primos este polinomio se tiene

$$k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = (k-2)(k^2 - k - 6),$$

y para que un producto de dos elementos sea cero basta que alguno de los dos lo sea, es decir,

$$(k-2)\,(k^2-k-6)\;=\;0 \Rightarrow \begin{cases} k-2=0 \;\Rightarrow k=2 \\ \text{o} \\ k^2-k-6=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-2 \\ \text{o} \\ k=3 \end{cases} \end{cases}$$

Luego, $x = 2$, $x = -2$ y $x = 3$ son los valores buscados.

TEMA 9

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Problema 1

Determinar todos los menores de orden 2 de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución. Un menor de orden 2 de la matriz A es un determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden 2 que se construye con parte de filas o columnas de la matriz sin cambiarlos del lugar que ocupan. Describimos las submatrices cuadradas de orden 2.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, S_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_6 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así pues, los menores de orden 2 son:

$$|S_1| = 1, |S_2| = -1, |S_3| = 0, |S_4| = -5, |S_5| = -1, |S_6| = 1.$$

Problema 2

Determinar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solución. El rango de una matriz es el orden del menor de mayor tamaño (mayor orden) que no es nulo, es decir, se trata de obtener el orden del más grande determinante, que se pueda construir, que no sea nulo.

- Matriz A. El mayor determinante que se puede construir con elementos de A es de orden 3, pues la matriz A es cuadrada de orden 3. Así pues, rang (A) ≤ 3.

Estudiemos el valor del determinante de la matriz (aplicando la regla de Sarrous);

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6+4+15-10-3-12 = 0,$$

por lo tanto, rang (A) $\neq 3$, es decir, rang (A) ≤ 2.

Si consideramos el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, se observa que no es nulo. De esta forma se establece que rang (A) $= 2$.

- Matriz B. Calculamos el determinante de la matriz B (haciendo ceros);

$$|B| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (c_1 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

pues, si en un determinante toda una fila o columna esta constituido por ceros el determinante es nulo. Así pues, rang (B) $\neq 5$, es decir, rang (B) ≤ 4.

Cualquier menor de orden 4 que tenga todos los elementos de la diagonal con -4 es nulo por la misma razón que $|B| = 0$. Por lo tanto, elegimos otro menor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (c_2 = c_2 - c_1) \\ (c_3 = c_3 - c_1) \\ = \\ (c_4 = c_4 - c_1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 125 \neq 0.$$

De esta forma se tiene que rang (B) $= 4$.

Conclusión: Como los menores de orden tres de la matriz A son nulos y existe un menor de orden dos no nulo, entonces rang (A) $= 2$. Análogamente, como los menores de orden cinco de la matriz B son nulos y existe un menor de orden cuatro no nulo, entonces rang (B) $= 4$.

Problema 3

Resolver el siguiente sistema compatible y determinado utilizando la matriz inversa de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}.$$

Solución. Este sistema de ecuaciones se puede expresar matricialmente de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

o lo que es lo mismo $A \cdot X = B$ donde

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (matriz de coeficientes); $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (matriz de incognitas); $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (matriz términos independientes).

Este sistema es compatible y determinado (es un sistema de Cramer) puesto que

$$\text{rang}\,(A) = \text{nº de incógnitas} = \text{nº de ecuaciones},$$

es decir, $\text{rang}\,(A) = 3$ debido a que $|A| \neq 0$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 1 - 0 + 1 - 3 = -6 \neq 0 \text{ (por la regla de Sarrous)}.$$

Al ser la matriz A inversible (puesto que toda matriz con determinante no nulo lo es) se puede multiplicar cada lado de la igualdad matricial que define el sistema de ecuaciones por la matriz A^{-1}.

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$ (puesto que $A^{-1} \cdot A = I$, matriz identidad)

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$ (puesto que $I \cdot X = X$ por ser I la matriz identidad).

Luego, para determinar los valores que toman las incógnitas tan sólo se requiere determinar la matriz A^{-1}. Procedemos a su cálculo.

Primero determinamos los adjuntos y la matriz adjunta:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\,,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\,,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\,,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\,,\quad A^{*t} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot A^{*t} = -\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Conclusión: La solución del sistema es $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$.

Problema 4

Resolver por la regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ 4x - 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + u &= 10 \\ x + 3y \quad\ + 2u &= 7 \\ 2x \quad\ - z + 3u &= 1 \\ 3x + 2y - z + u &= 9 \end{aligned}$$

Solución.

a) Primeramente se comprueba que se trata de un sistema de Cramer, (es decir que el rango de la matriz de coeficientes coincide con el número de ecuaciones y con el numero de incognitas) para ello, escribimos el sistema de forma matricial,

$$A\cdot X = B\,,\quad \text{o sea}\,,\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y se estudia el rango de A. Estudiamos inicialmente el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6+8-3-12+1-12 = -12 \neq 0$$ (por la regla de Sarrous).

Al ser $|A| \neq 0$ se tiene que rang (A) = 3. Luego, es un sistema de Cramer (sistema compatible y determinado) que resolvemos aplicando la regla de Cramer (el valor de cada incógnita se obtiene al calcular el determinante de la matriz obtenida al sustituir la columna de los coeficientes de dicha incógnita por la columna del término independiente, B , y dividirlo éste por |A|).

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

1 2 3

1 coeficientes de x, **2** coeficientes de y, **3** coeficientes de z, de cada ecuación.

$$x = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \quad ; \quad y = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{11}{6} ;$$

$$z = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{19}{6} .$$

Las soluciones son, $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{11}{6}$, $z = \frac{19}{6}$.

b) Procedemos de forma análoga al primer apartado.

$$A \cdot X = B \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Estudiamos el rango de A (para ello, hacemos ceros en la primera columna)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (F_2 = F_2 - F_1) \\ (F_3 = F_3 - 2F_1) \\ = \\ (F_4 = F_4 - 3F_1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -4 & -7 & 1 \\ -4 & -10 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix}(F_2 \approx F_2 - F_1)\\ = \\ (F_3 = F_3 + 2F_1)\end{matrix} \begin{vmatrix} 1^{+} & -3^{-} & 1^{+} \\ -5 & -4 & 0 \\ -2 & -16 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -16 \end{vmatrix} = 72 \neq 0 ;$$

por lo tanto, rang (A) = 4 = nº de incógnitas = nº de ecuaciones. Es decir, es un sistema (compatible y determinado) de Cramer. Los valores que toman las incógnitas son (por la regla de Cramer) :

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}(F_1 \approx F_1 + 3F_3)\\ = \\ (F_4 \approx F_4 - F_3)\end{matrix} \frac{1}{72} \begin{vmatrix} 13^{+} & 2^{-} & 0^{+} & 10 \\ 7 & 3 & 0^{-} & 2 \\ 1 & 0 & -1^{+} & 3 \\ 8 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{(-1)}{72} \begin{vmatrix} 13 & 2 & 10 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{85}{36} .$$

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}(F_1 \approx F_1 + 3F_3)\\ = \\ (F_4 \approx F_4 - F_3)\end{matrix} \frac{1}{72} \begin{vmatrix} 7^{+} & 13^{-} & 0^{+} & 10 \\ 1 & 7 & 0^{-} & 2 \\ 2 & 1 & -1^{+} & 3 \\ 1 & 8 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{(-1)}{72} \begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \frac{37}{18} .$$

$$z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix}(F_2 = F_2 - F_1)\\ (F_3 \approx F_3 - 2F_1)\\ = \\ (F_4 \approx F_4 - 3F_1)\end{matrix} \frac{1}{72} \begin{vmatrix} 1^{+} & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -19 & 1 \\ 0 & -4 & -21 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{1}{72} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -4 & -19 & 1 \\ -4 & -21 & -2 \end{vmatrix} = \frac{103}{72} .$$

$$u = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} (F_1 \approx F_1 + 3F_3) \\ = \\ (F_4 \approx F_4 - F_3) \end{matrix} \frac{1}{72}\begin{vmatrix} 7^{+} & 2^{-} & 0^{+} & 13 \\ 1 & 3 & 0^{-} & 7 \\ 2 & 0 & -1^{+} & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{-1}{72}\begin{vmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{55}{72}$$

Las soluciones son, $x = \frac{85}{36}$, $y = \frac{37}{18}$, $z = \frac{103}{72}$, $u = -\frac{55}{72}$

Problema 5

Estudiar y resolver, si se puede, el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + z &= 6 \\ y + z &= 7 \\ x + y + 2z &= 13 \\ 2x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

Solución. Para determinar si el sistema es compatible (posee solución) se estudian los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. En el caso de coincidir se tiene asegurada la compatibilidad.

$$A \cdot X = B \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes A no es mayor que 3. Veamos que rang(A) = 3. Para ello, determinamos un menor de orden 3 no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

La matriz ampliada (la matriz de coeficientes con una columna más constituida por las columnas de términos

independientes) es:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Se observa que en cualquier determinante de orden 4 se debe utilizar alguna de las dos últimas filas de la matriz, ahora bien,

$$F_4 = F_2 + F_3 \quad \text{y} \quad F_5 = F_1 + F_2$$

Luego, esos determinantes deben ser nulos puesto que tienen una fila que es combinación de las demás (esto es una propiedad de los determinantes).

Como todos los determinantes de orden cuatro son nulos, y se sabe que existe un menor de orden tres no nulo, entonces $\text{rang}(\overline{A}) = 3$.

El sistema es compatible, además, (como hay dos ecuaciones que son sumas de otras podemos descartar del sistema estas dos ecuaciones) el sistema es equivalente al sistema que se construye al considerar únicamente las ecuaciones que intervienen en el menor no nulo que se utilizó para determinar el rango. Así pues, basta resolver el siguiente sistema:

$$A' \cdot X = B' \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

del cual se sabe que $|A'| = -2$, y que se trata de un sistema compatible y determinado equivalente al sistema del enunciado.

Al aplicar la regla de Cramer se tiene:

$$x = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad y = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad z = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4$$

Problema 6

¿Tienen solución no nula los siguientes sistemas homogéneos?

a)
$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 8z &= 0 \\ 2x + y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y \quad\quad + 5t &= 0 \\ x \quad + z + 6t &= 0 \\ y + z + 7t &= 0 \\ x + y + 2z + 13t &= 0 \end{aligned}$$

Solución.

a) Que el sistema es compatible está claro pues los valores $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, verifican la ecuación y, por tanto, constituyen una solución del sistema.

Escribimos el sistema en forma matricial,

$$A \cdot X = B \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y determinamos el rango de la matriz de coeficientes A , que forzosamente coincide con el rango de la matriz ampliada $\overline{A}$ (pues ésta aporta una columna de ceros, y cualquier menor que la contenga se anula).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-3+16+4+8-15 = 0,$$

así pues, $\text{rang}(A) \neq 3$. Ahora bien, al tomar el menor de orden 2,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 \neq 0,$$

se tiene que $\text{rang}(A) = 2$. Por lo tanto se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con un grado de libertad (una incognita actúa como si fuera un parámetro. es decir, una variable se sustituye por un parámetro). Además, el sistema es equivalente al formado por las ecuaciones que intervienen en el menor no nulo que determina el rango:

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 3x + 2y - 8z = 0 \end{array}\right.$$

Podemos considerar que la incógnita z actúa como un parámetro, es decir, $z = \lambda$, entonces el sistema se reescribe de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = \lambda \\ 3x + 2y = 8\lambda \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} x = \lambda + y \\ 3(\lambda + y) + 2y = 8\lambda \end{array}\right\} \simeq \left.\begin{array}{l} x = \lambda + y \\ 3\lambda + 3y + 2y = 8\lambda \end{array}\right\} \simeq \left.\begin{array}{l} x = \lambda + y \\ y = \lambda \end{array}\right\}.$$

Luego, las soluciones del sistema dependen de un único parámetro:

$$x = 2\lambda \; ; \; y = \lambda \; ; \; z = \lambda .$$

b) El sistema es compatible pues $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, es una solución de él.

$$A \cdot X = B \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} (F_2 \approx F_2 - F_1) \\ = \\ (F_4 \approx F_4 - F_1) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

(pues $F_3 = F_1 + F_2$) luego, $\text{rang}(A) \neq 4$. Se tiene que $\text{rang}(A) = 3$ pues el menor de orden 3 siguiente no es nulo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \, .$$

El sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad y, además, este sistema es equivalente al siguiente sistema,

$$\begin{matrix} x + y \quad + 5t = 0 \\ x \quad + z + 6t = 0 \\ y + z + 7t = 0 \end{matrix} \quad ; \quad A' \cdot X = B' \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema una de las incógnitas debe actuar como un parámetro, por ejemplo, $t = \lambda$. Se tiene,

$$\begin{matrix} x + y \quad = -5\lambda \\ x \quad + z = -6\lambda \\ y + z = -7\lambda \end{matrix} \; ; \; A'' \cdot X = B'' \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\lambda \\ -6\lambda \\ -7\lambda \end{bmatrix}.$$

que es un sistema de Cramer (puesto que $\text{rang}(A'') = \text{rang}(\bar{A}'') = 3$) con $|A''| = -2$ y al aplicar la regla de Cramer se obtiene,

$$x = \frac{1}{|A''|} \begin{vmatrix} -5\lambda & 1 & 0 \\ -6\lambda & 0 & 1 \\ -7\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda \ , \ y = \frac{1}{|A''|} \begin{vmatrix} 1 & -5\lambda & 0 \\ 1 & -6\lambda & 1 \\ 0 & -7\lambda & 1 \end{vmatrix} = -3\lambda \, ,$$

$$z = \frac{1}{|A''|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5\lambda \\ 1 & 0 & -6\lambda \\ 0 & 1 & -7\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda\,.$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema dependen de un único parámetro,

$$x = -2\lambda\,,\ y = -3\lambda\,,\ z = -4\lambda\,,\ t = \lambda\,.$$

Conclusión: Un sistema homogéneo siempre es compatible puesto que la solución nula siempre verifica el sistema homogéneo.

Problema 7

Estudiar y discutir el siguiente sistema para los distintos valores que representa $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x \quad &+ \quad y - \quad z = 3 \\ 3x \quad &+ 4y - \quad z = 5 \\ x \quad &+ \quad y - \alpha z = 3 \\ \alpha x + 2y &+ (\alpha+2)\,z = \alpha^2 - 2 \end{aligned}$$

Solución. Inicialmente se escribe el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha & 2 & \alpha+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ \alpha^2 - 2 \end{bmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes A no puede ser mayor que 3, sin embargo, el rango de la matriz ampliada $\overline{A}$ puede ser 4.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha+2 & \alpha^2 - 2 \end{bmatrix}.$$

$$|\overline{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha+2 & \alpha^2 - 2 \end{vmatrix} \overset{(F_1 \approx F_1 - F_3)}{=} \begin{vmatrix} 0^{+} & 0^{-} & (-1+\alpha)^{+} & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha+2 & \alpha^2 - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= + (\alpha-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha^2-2 \end{vmatrix} \begin{matrix}(c_2 \approx c_2 - c_1) \\ = \\ (c_3 \approx c_3 - 3c_1)\end{matrix} (\alpha-1)\begin{vmatrix} 3^{+} & 1 & -4 \\ 1^{-} & 0 & 0 \\ \alpha & 2-\alpha & \alpha^2-3\alpha-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2-\alpha & \alpha^2-3\alpha-2 \end{vmatrix} = -(\alpha-1)\cdot(\alpha^2-7\alpha+6) =$$

$$= -(\alpha-1)^2(\alpha-6)\ .$$

Si $\alpha \neq 6$ y $\alpha \neq 1$ entonces $|\overline{A}| \neq 0$ y por lo tanto $\text{rang}(\overline{A}) = 4$. En este caso se tiene que $\text{rang}(A) \leq 3$ y $\text{rang}(\overline{A}) = 4$ (rang (A) ≠ rang ($\overline{A}$)) ; el sistema es incompatible (no posee solución).

Si $\alpha = 1$, entonces $|\overline{A}| = 0$ y el sistema se reescribe de la forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Basta considerar el menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\ ,$$

para comprobar que $\text{rang}(A) = 3$ (además, rang ($\overline{A}$) = 3). Luego, se trata de un sistema compatible y determinado equivalente al sistema:

$$A' \cdot X = B' \ ; \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

al cual se le aplica la regla de Cramer,

$$x = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \ ; \ y = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \ ; \ z = \frac{1}{|A'|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Si $\alpha = 6$, entonces $|\overline{A}| = 0$. El sistema se reescribe de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Basta considerar el menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

para comprobar que $\text{rang}(A) = 3$ (además, $\text{rang}(\bar{A}) = 3$). Se trata de un sistema compatible y determinado equivalente al sistema,

$$A'' \cdot X = B'' \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 34 \end{bmatrix},$$

al cual se le aplica la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{|A''|}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 34 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 7, \; y = \frac{1}{|A''|}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 34 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad z = \frac{1}{|A''|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 34 \end{vmatrix} = 0$$

Problema 8

Discutir el sistema siguiente dependiendo de los valores que representan $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + \alpha z &= \beta \\ x + y - 2z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= \beta \end{aligned}$$

Solución. Se reescribe el sistema en forma matricial,

$$A \cdot X = B \quad , \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix},$$

y se estudia rang(A).

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 5\alpha - 3 .$$

Los valores que anulan a la expresión $\alpha^2 + 5\alpha - 3$ son,

$$\alpha = \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{-5-\sqrt{37}}{2} .$$

En estos casos se tiene que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, entonces, rang(A) = 2.

En los casos contrarios,

$$\alpha \neq \frac{-5+\sqrt{37}}{2} \quad \text{y} \quad \alpha \neq \frac{-5-\sqrt{37}}{2},$$

se tiene que $|A| \neq 0$, luego rang (A) = 3 y el sistema es compatible determinado.

Supongamos que $\alpha = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$ o $\alpha = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$ y estudiamos el rango de la matriz ampliada,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

Se estudian los siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 2 - 3\alpha + \alpha\beta \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & \alpha & \beta \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = -3 + \alpha - (3+\alpha)\beta ;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 1 & -2 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \end{vmatrix} = -2 + \alpha^2 + (\alpha - 3)\beta .$$

Si el primer menor es cero,como $\alpha \neq 0$, $2 - 3\alpha + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3\alpha - 2}{\alpha} = 3 - \frac{2}{\alpha}$,

si el segundo menor es cero,como $\alpha \neq -3$, $-3 + \alpha - (3+\alpha)\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-3+\alpha}{3+\alpha}$,

si el tercer menor es cero, como $\alpha \neq 3$, $-2 + \alpha^2 + (\alpha - 3)\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{-\alpha^2 + 2}{\alpha - 3}$.

Para que se anulen simultáneamente los dos primeros menores debe ser,

$$3-\frac{2}{\alpha}=\frac{-3+\alpha}{3+\alpha}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{4+\sqrt{37}}{3}\\ \text{o}\\ \alpha=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{4-\sqrt{37}}{3}\end{cases}$$

Para que también se anulen el primer y tercer menor debe ser,

$$3-\frac{2}{\alpha}=\frac{-\alpha^2+2}{\alpha-3}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{4+\sqrt{37}}{3}\\ \alpha=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{4-\sqrt{37}}{3}\\ \alpha=2\Rightarrow\beta=2\end{cases}$$

Conclusión: Si $\alpha\neq\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$ y $\alpha\neq\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$ el sistema es compatible y determinado, si $\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$ y $\beta\neq\dfrac{4+\sqrt{37}}{3}$ o si $\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$ y $\beta\neq\dfrac{4-\sqrt{37}}{3}$ es incompatible y, por último, si $\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$ y $\beta=\dfrac{4+\sqrt{37}}{3}$ o si $\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$ y $\beta=\dfrac{4-\sqrt{37}}{3}$ es compatible indeterminado.

Problema 9

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones y resolverlo en el caso que se pueda.

$$\begin{aligned}2x+y&=1\\ x+y-2z&=1\\ 3x+y+az&=b\end{aligned}$$

Solución.

$$A\cdot X=B\;;\;\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&-2\\3&1&a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\b\end{bmatrix}\;;\;\overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&1&-2&1\\3&1&a&b\end{bmatrix}.$$

Se estudia el determinante de la matriz de coeficientes $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = a-2.$

Luego, si $a \neq 2$, entonces rang $(A) = 3$ y rang $(\bar{A}) = 3$. Así pues, en el caso $a \neq 2$ se tiene un sistema compatible y determinado de solución,

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ b & 1 & a \end{vmatrix} = \frac{-2b+2}{a-2} \; ; \; y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & b & a \end{vmatrix} = \frac{a+4b-6}{a-2} \; ;$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = \frac{b-1}{a-2}$$

Sea $a = 2$. Se estudian los menores de orden 3 de la matriz $\bar{A}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b-1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & b \end{vmatrix} = -4b+4 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 2-2b = -2(b-1) \; .$$

Estos menores se anulan para $b = 1$.

Si $a = 2$, entonces rang $(A) = 2$ y $\begin{cases} \text{si } b \neq 1 & \text{rang } (\bar{A}) = 3 \\ \text{si } b = 1 & \text{rang } (\bar{A}) = 2 \end{cases}$

Luego, en el caso de $a = 2$ y $b \neq 1$ se tiene un sistema incompatible (rang $(A) \neq$ rang $(\bar{A})$).

En el caso $a = 2$ y $b = 1$ se tiene un sistema compatible indeterminado, con un grado de libertad (rang $(A) =$ rang $(\bar{A}) = 2$), equivalente al sistema,

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Elegida x como la incognita que actúa de parametro, $x = \lambda$, se tiene

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 - 2\lambda \\ y - 2z &= 1 - \lambda \end{aligned}\right\} \approx \left.\begin{aligned} y &= 1 - 2\lambda \\ z &= -\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\},$$

cuyas soluciones son: $x = \lambda \ ; \ y = 1 - 2\lambda \ ; \ z = -\frac{\lambda}{2}$

Problema 10

Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + \ y + \ z + \ t &= 4 \\ x - \ y + 2z - \ t &= 3 \\ 3x + 12y - 9z + 12t &= -1 \\ -4x - \ 5y + \ z - \ 5t &= -6 \end{aligned}$$

Solución. Se reescribe el sistema en forma matricial,

$$A \cdot X = B \ ; \ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & -9 & 12 \\ -4 & -5 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \ ; \ \overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 12 & -9 & 12 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Para determinar el rango de esta matriz ampliada, (que es una matriz grande) se deberan hacer cuatro determinantes de orden cuatro, todos nulos, y dieciseis determinantes de orden tres, todos nulos, y un determinante de orden dos que no es nulo. Así pues, la estrategia de aplicar directamente el teorema de Rouché-Frobeniüs para estudiar el sistema puede no ser la mejor (si después de hacer unos cuantos determinantes se observa que todos son cero, es preferible resolver el problema de esta forma).

Como el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es el mismo en todos aquellos sistemas que son equivalentes, entonces se puede transformar el sistema mediante el método de Gauss. Para ello, sólo se actúa sobre las filas de la matriz ampliada en la cual se pueden reordenar las filas, es decir, de una matriz ampliada de un sistema se pasa a otra matriz ampliada de otro sistema equivalente:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 12 & -9 & 12 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \overline{A}' \simeq \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 12 & -9 & 12 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \quad (\text{se han permutado } F_1 \text{ y } F_2)$$

$$\begin{matrix} (F_2 = F_2 - 2F_1) \\ \simeq \\ (F_3 \simeq F_3 - 3F_1) \\ (F_4 \simeq F_4 + 4F_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 15 & -15 & 15 & -10 \\ 0 & -9 & 9 & -9 & 6 \end{bmatrix} = \overline{A}''$$

Como $\overline{A}''$ tiene tres filas proporcionales, entonces cualquier menor de orden 4 o de orden 3 tendrán dos filas proporcionales. Luego, dichos menores son nulos. Asi pues,

$$\text{rang}\,(\overline{A}'') = 2 = \text{rang}\,(A'') \text{ puesto que } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 .$$

Como el sistema de matriz de coeficientes A'' y de matriz ampliada $\overline{A}''$ es equivalente al de la matriz de coeficientes A y de matriz ampliada $\overline{A}$, se tiene que

$$\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A'') = \text{rang}\,(\overline{A}'') = \text{rang}\,(\overline{A}) .$$

Se trata de un sistema compatible e indeterminado con dos grados de libertad (es decir dos incognitas deben actuar de parámetros independientes) equivalente al sistema,

$$\begin{aligned} 2x + y + z + t &= 4 \\ x - y + 2z - t &= 3 \end{aligned} .$$

Si se considera $x = \lambda$ e $y = \mu$, entonces se dispone del sistema,

$$\left.\begin{aligned} z + t &= 4 - 2\lambda - \mu \\ 2z - t &= 3 - \lambda + \mu \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} z &= \frac{7}{3} - \lambda \\ t &= \frac{5}{3} - \lambda - \mu \end{aligned}\right\} .$$

Las soluciones son:

$$x = \lambda \;;\; y = \mu \;;\; z = \frac{7}{3} - \lambda \;;\; t = \frac{5}{3} - \lambda - \mu \quad .$$

TEMA 10

Elementos de geometría

Problema 1

a) Un ángulo α mide 5° ¿cuánto mide α en radianes?

b) Un ángulo β mide $\frac{\pi}{10}$ radianes ¿cuánto mide β en grados?

c) Calcúlese la medida en radianes de un ángulo cuya medida en grados es $10^\circ\ 37'$.

d) Obténgase una medida aproximada, en grados, minutos y segundos, de un ángulo que mide 3´5 radianes.

Solución.

a) Dado que el ángulo completo de 360° mide 2π radianes, entonces $\alpha = 5^\circ$ mide

$$\alpha = 5 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{36} \text{ radianes}$$

b) Como el ángulo completo 2π radianes mide 360°, entonces $\beta = \frac{\pi}{10}$ radianes mide

$$\beta = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{360}{2\pi} = 18^\circ.$$

c) Dado que en un grado son sesenta minutos, entonces 37 minutos son $\frac{37}{60}$ grados. Así pues, el ángulo mide

$$(10 + \frac{37}{60}) \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{637}{10800}\pi \text{ radianes.}$$

d) En primer lugar se obtiene el número real de grados (número con decimales de grado) que mide dicho ángulo:

$$3'5 \cdot \frac{360}{2\pi} = \frac{630}{\pi}.$$

Este número real admite como aproximación decimal,

$$\frac{630}{3'1416} = 200'5348^\circ.$$

Ahora, se expresa en minutos y decimales de minuto la parte decimal, $0'5348$, de grado. Dado que en 1° son $60'$, entonces para obtener los minutos bastará multiplicar por 60:

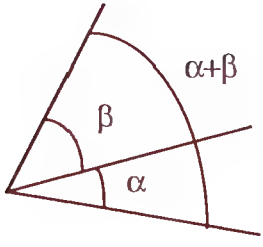
$$0'5348 \cdot 60 = 32'088'.$$

Por último, se obtienen los segundos de la parte decimal, $0'088$, de minuto. Como $60''$ son $1'$, entonces multiplicamos $0'088$ por 60 obteniendo $5'28$.

Conclusión: El ángulo dado mide aproximadamente $200^\circ\, 32'\, 5''$.

Problema 2

Supuesto que se tienen tres semirrectas con el extremo común (véase la figura) y los tres ángulos:



a) Si α mide $32^\circ\, 40'\, 50''$ y β mide $62^\circ\, 28'\, 43''$ ¿cuanto mide $\alpha+\beta$?

b) Si $\alpha+\beta$ mide $127^\circ\, 20'$ y α mide $35^\circ\, 40'\, 20''$ ¿cuanto mide β?

Solución. Dados dos ángulos α y β con una de las semirrectas que los definen común, se define suma de α y β como el ángulo $\alpha+\beta$ que determinan las semirrectas que no son la semirrecta común y que contiene a las regiones definidas por α y β.

La medida de $\alpha+\beta$ en radianes coincide con la suma numérica de las medidas de α y β, sin embargo, cuando las medidas de α y β vienen dadas en el sistema sexagesimal (grados, minutos y segundos) al sumar se ha de tener en cuenta que un grado se transforma en 60 minutos y un minutos en sesenta segundos.

a) Sumamos primero los segundos que mide $\alpha+\beta$,

$$50'' + 43'' = 93'' \quad \text{que son} \quad 1' \text{ y } 33''.$$

Obtenemos los minutos,

$$40' \text{ (minutos de } \alpha) + 28' \text{ (minutos de } \beta) + 1' \text{ (de la suma de los segundos)} = 69' \quad \text{que son} \quad 1^\circ \text{ y } 9'.$$

Por último, sumamos los grados:

32° (grados de α) + 62° (grados de β) + 1° (de la suma de los minutos) = 95°.

Por tanto, $\alpha+\beta$ mide 95° 9' 33''. El algoritmo de la suma es similar al de números

	32°	40'	50''	α
+	62°	28'	43''	β
(resultado)	94°	68	93''	(sumas de grados minutos y segundos por separado)
	94°	69'	33''	(transformación de segundos en minutos)
	95°	9'	33''	(transformación de minutos en grados)

b) Para hallar la medida de β basta restar a la medida de $\alpha+\beta$ la de α. Pero para conseguir restar obteniendo número de segundos positivo, dado que el número de segundos de α es mayor que el de $\alpha+\beta$ hemos de añadir 60'' y suprimir un minuto en $\alpha+\beta$.

Dado que $\alpha+\beta$ mide 127° 20', para hallar la medida de β escribiremos que $\alpha+\beta$ mide 127° 19' 60'', por lo que los segundos que mide β son,

$$60'' - 20'' = 40''.$$

Para obtener los minutos se realiza una operación similar reescribiendo que $\alpha+\beta$ mide 126° 79' 60'' obteniendo,

$$(19 + 60)' - 40' = 39'.$$

Así pues, los grados de β son:

$$(127 - 1_{\text{(grado suprimido por el cálculo de los minutos)}})^\circ - 35^\circ = 91^\circ.$$

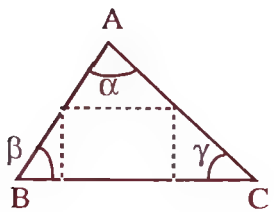
Por tanto β mide 91° 39' 40''. El algoritmo de la resta es similar al de la resta de números naturales.

	127°	20'		(no se pueden restar segundos, se transforma la escritura del ángulo)
	127°	19'	60''	(no se pueden restar minutos, se transforma la escritura del ángulo)
	126°	79'	60''	$\alpha+\beta$
	35°	40'	20''	α
(resultado)	91°	39'	40''	β

Problema 3

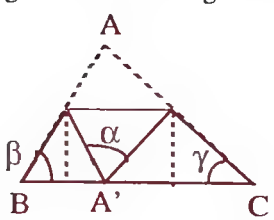
Construir un triángulo de papel ABC y utilizarlo para probar que la suma de los ángulos de tal triángulo es π realizando los siguientes pliegues:

- Pliegue por una recta paralela al lado BC de modo que el vértice A se sitúe sobre el lado BC.



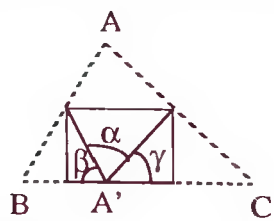
- Pliegue por las rectas perpendiculares a BC de modo que los vértices B y C se sitúen donde se encuentra A después del primer pliegue.

Solución. Realizado el primer pliegue se muestra la siguiente figura,



y obsérvese como hemos construido un ángulo con vértice A' y cuya medida es también α.

Al realizar ahora los otros dos pliegues el resultado es:

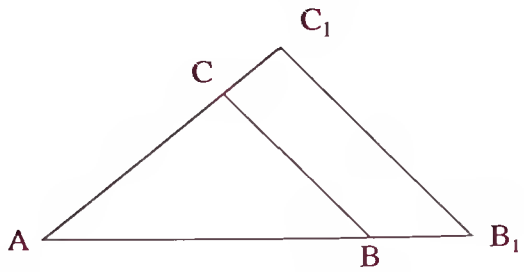


Al hacer estos pliegues se obtienen dos nuevos ángulos con vértice A' de medidas β y γ. Dado que los tres ángulos con vértice A' suman un ángulo cuyo vértice es A' y las dos semirrectas que lo definen están sobre la misma recta (la recta que contiene al lado BC) tenemos así que $\alpha+\beta+\gamma$ es π.

Problema 4

En la figura siguiente se conocen las siguientes medidas de segmentos: AC es 8 m, AC_1 es 10 m y C_1B_1 es 5 m. Si se sabe que la recta que contiene a CB es paralela a la recta que contiene a C_1B_1, calcúlese la medida de CB.

Solución. Dado que las rectas que contienen a CB y a C_1B_1 son paralelas y el ángulo con vértice A es común a los triángulos ABC y AB_1C_1, entonces los triángulos ABC y AB_1C_1



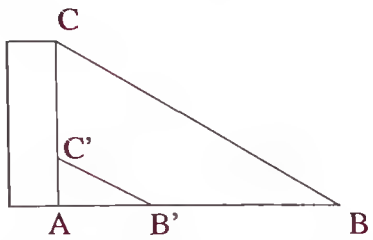
son semejantes y podemos aplicar el Teorema de Tales:

$$\frac{10}{8} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1B_1}{CB} = \frac{5}{CB}, \quad \text{de donde} \quad CB = 5 \cdot \frac{8}{10} = 4 \text{ m.}$$

Problema 5

La sombra de un edificio mide 10 metros y la sombra correspondiente a su primer piso mide 2 metros. Si se sabe que la altura del primer piso es 3 metros, calcúlese la altura del edificio.

Solución. En los ejercicios de geometría es aconsejable dibujar una figura esquemática del problema para aclarar las ideas.



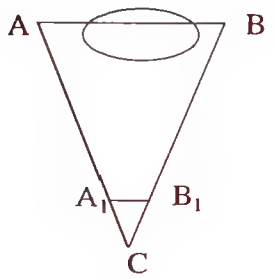
Los datos conocidos son la longitud de AB que es 10 metros, la de AB' que es 2 metros y la de AC' que son 3 metros. Como la recta que contiene a BC es paralela a la que contiene a B'C' (se trata de los rayos que provienen del sol que suponemos que son paralelos) y el ángulo con vértice A es común a los triángulos ABC y AB'C', tales triángulos son semejantes. Al aplicar el Teorema de Tales tenemos:

$$\frac{10}{2} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AC}{3},$$

de donde se obtiene la altura del edificio $AC = 3 \cdot \frac{10}{2} = 15$ metros.

Problema 6

Para obtener la distancia de A a B salvando un pequeño lago se han efectuado las siguientes medidas: $CA_1 = 2$ metros, $A_1B_1 = 2'5$ metros y $CA = 110$, con la precaución de que las rectas que contienen a AB y A_1B_1 sean paralelas. ¿Cual es la longitud de AB?



Solución. Al aplicar el teorema de Tales tenemos:

$$\frac{110}{2} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AB}{2'5}, \text{ por tanto } AB = 2'5 \cdot \frac{110}{2} = 137'5 \text{ metros.}$$

Problema 7

Un triángulo rectángulo tiene dos catetos con la misma longitud y su hipotenusa mide 2 metros. ¿Cuánto miden los catetos?

Solución. Se considera que x representa la medida de un cateto. Como el triángulo es rectángulo se puede aplicar el teorema de Pitágoras

$$2^2 = x^2 + x^2 = 2x^2,$$

de donde obtiene la ecuación $x^2 = 2$ cuyas soluciones son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

Conclusión: Como x representa una longitud, entonces $x = \sqrt{2}$ metros.

Problema 8

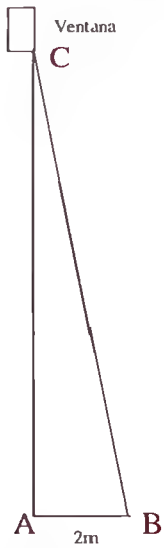
Una ventana del tercer piso de un edificio está a una altura de 10 m. El pie de una escalera para llegar a tal ventana no se puede aproximar más de 2 m a la base del edificio. ¿Cual debe ser la longitud mínima de la escalera para llegar a la ventana?

Solución. Cuanto más se aleje el pie de la escalera de la base del edificio más larga debe ser esta escalera, así pues, la escalera de longitud mínima será aquella que alcanza la altura de la

ventana situado su pie exactamente a dos metros de la base del edificio (véase la figura).

Como el triángulo ABC de la figura es rectángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = 10^2 + 2^2 = 104\,,$$



obteniendo $BC = \sqrt{104}$ m, es decir, la altura mínima pedida es $\sqrt{104} = 10'19$ m.

Problema 9

Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2'5 cm y 15'5 cm es semejante a otro cuya hipotenusa mide 10 cm. Calcule la longitud de los catetos del segundo triángulo.

Solución. Se considera que a representa la longitud de la hipotenusa, b la longitud de un cateto y c la longitud del otro cateto correspondientes al primer triángulo. Así pues, b = 2'5 cm y c = 15'5 cm.

La longitud de la hipotenusa del segundo triángulo la designamos a', por tanto a' = 10 cm, y sus catetos por b' y c'.

Por el teorema de Pitágoras aplicado al primer triángulo rectángulo tenemos:

$$a^2 = 2'5^2 + 15'5^2, \text{ luego } a = \sqrt{2'5^2 + 15'5^2} = \sqrt{246'5} = 15'7 \text{ cm}.$$

Como los triángulos son semejantes, podemos aplicar el teorema de Tales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

de forma que al sustituir obtenemos,

$$\frac{15'7}{10} = \frac{2'5}{b'} = \frac{15'5}{c'},$$

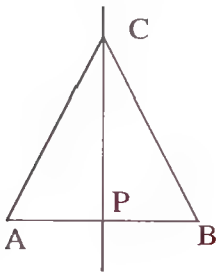
de donde, $b' = \frac{25}{15'7} = 1'59$ cm y $c' = \frac{155}{15'7} = 9'87$ cm.

Problema 10

Un triángulo isósceles es aquel que posee dos lados con la misma longitud. El punto medio M de un segmento AB es aquel punto del segmento de modo que la longitud AM es igual a la longitud MB. Sea ABC un triángulo isósceles de modo que AC es igual a BC, pruébese que la recta perpendicular por el punto C a la recta que contiene al lado AB corta a AB en su punto medio.

Solución. Hemos de probar que P es el punto medio de AB. Para ello, basta probar que la longitud de AP es igual a la longitud de PB.

Como P es el punto de corte del segmento perpendicular a AB que pasa por C, entonces los triángulos APC y BCP son rectángulos y se puede utilizar el teorema de Pitágoras en cada uno de ellos.



$$AP = \sqrt{AC^2 - PC^2} \quad \text{y} \quad BP = \sqrt{BC^2 - PC^2}.$$

Al ser el triángulo ABC isósceles se tiene que BC = AC, así pues, de las ecuaciones anteriores se obtiene que AP = BP.

TEMA 11

Trigonometría

En todo este Tema se consideraran ángulos menores que un ángulo recto, es decir, menores que $90°$ *o que* $\frac{\pi}{2}$ *radianes.*

Problema 1

Sea un triángulo rectángulo donde un ángulo β mide $15°$ y el cateto opuesto a este ángulo mide 3 cm. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?.

Solución. Si a es la hipotenusa del triángulo y b y c los catetos, donde b = 3 cm, entonces, por la definición de seno, tenemos:

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 15° = \frac{b}{a} = \frac{3}{a} \quad \text{o bien} \quad a = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Con ayuda de una calculadora se obtiene que $\operatorname{sen}15°$ es aproximadamente $0'2588$. Con lo que a mide aproximadamente $\frac{3}{0'2588} = 11'592$ cm.

Para hallar el otro cateto utilizamos la definición de coseno, tenemos:

$$\cos\beta = \cos 15° = \frac{c}{a} \quad \text{o bien} \quad c = a \cdot \cos\beta.$$

Utilizando de nuevo la calculadora se obtiene que el $\cos 15°$ es aproximadamente $0'9659$. De donde c mide aproximadamente $0'9659 \cdot 11'592 = 11'197$ cm.

Problema 2

Sin determinar previamente el ángulo α, con $\alpha < \frac{\pi}{2}$, contéstese a los siguientes apartados.

a) Si se sabe que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, hállense $\text{sen}\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\,\alpha$, $\sec\alpha$ y $\text{cosec}\alpha$. Con una calculadora científica obténgase un valor aproximado de α en radianes.

b) Si se sabe que $\text{cotg}\alpha = \frac{15}{8}$, hállense $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\sec\alpha$ y $\text{cosec}\alpha$.

Solución.

a) Al aplicar la fórmula $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obtenemos:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ \text{ó} \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Ahora bien, como el seno de un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ es un número positivo, entonces se tiene que $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

De la fórmula $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ se obtiene que $\text{tg}\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$ y de $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$ se obtiene $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ y $\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$, entonces

$$\sec\alpha = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{y} \quad \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Con calculadora en modo radian se obtiene que $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ es 1´2309959 (radianes).

b) Como $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\alpha}$, se obtiene que $\text{tg}\alpha = \frac{8}{15}$.

De las fórmulas $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y de el hecho de que el coseno de un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ es un número positivo se obtiene que $\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$, y al combinar esta última relación con la fórmula $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ tenemos $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$, luego

$$\frac{8}{15} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}} \text{ (al elevar al cuadrado cada miembro)} \Rightarrow \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{64}{225}(1-\text{sen}^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha \text{ (al despejar sen}^2\alpha) \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{\left(\frac{8}{15}\right)^2}{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2} = \frac{64}{64+225} = \frac{64}{289}.$$

Como el seno y la cosecante de un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ son números positivos, entonces

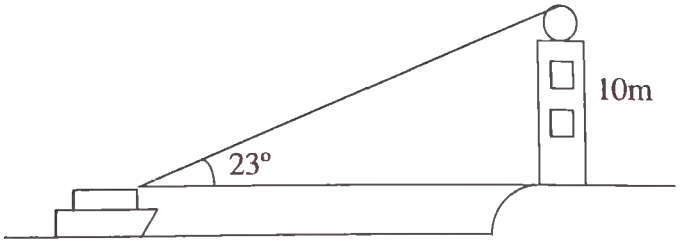
$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{\sqrt{289}} = \frac{8\sqrt{289}}{289} \text{ y } \text{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{289}}{8}$$

También el coseno y la secante de un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ son positivos, entonces

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{\sqrt{289}} = \frac{5\sqrt{289}}{289} \text{ y } \sec\alpha = \frac{\sqrt{289}}{15}.$$

Problema 3

Hallar la distancia del barco al faro de la figura conociendo que la altura del faro es 10 metros y la medida del ángulo de tal figura.



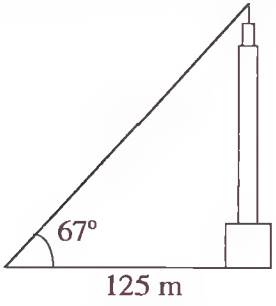
Solución. Sea d la distancia pedida. Por la definición de la tangente tenemos que: $\text{tg}23° = \frac{10}{d}$.

De una calculadora obtenemos que tg23° es aproximadamente 0´4245, por lo cual, d mide

aproximadamente $\frac{10}{0'4245}$, es decir, unos 23'5 metros.

Problema 4

Calcúlese la altura de la torre de la siguiente figura utilizando los datos de dicha figura.

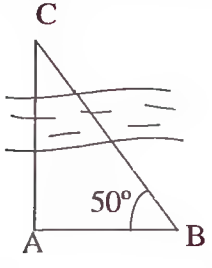


Solución. Sea h la altura pedida. Por la definición de tangente tenemos: $\text{tg}67° = \frac{h}{125}$.

Con una calculadora se obtiene que la tangente de 67° es aproximadamente 2'3559. Por lo tanto h mide aproximadamente 125·2'3559. Así pues, la torre mide unos 294 m de altura.

Problema 5

Se desea construir un puente a través de un río como muestra la figura. Un ingeniero ha medido AB, 250 metros, y el ángulo con vértice en B, 50°. ¿Cual es la longitud de AC?.

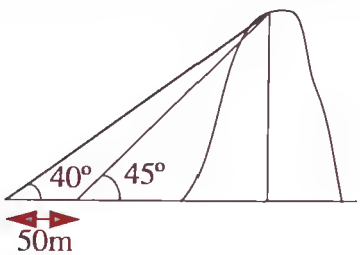


Solución. Por la definición de tangente tenemos: $\text{tg}50° = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{250}$.

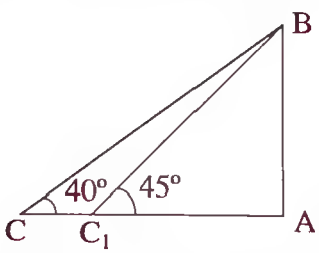
Con una calculadora se obtiene que tg50° es aproximadamente 1'1918, por lo tanto, AC es aproximadamente 250·1'1918; unos 298 metros.

Problema 6

Calcúlese la altura de la montaña de la figura con los datos de dicha figura.



Solución. Comenzaremos realizando un esquema y nombrando los puntos relevantes de la figura.



Por una parte tenemos que $AC = AC_1 + C_1C = AC_1 + 50$.

De la definición de tangente: $tg40° = \frac{AB}{AC}$ y $tg45° = \frac{AB}{AC_1}$. Así pues, $AC = \frac{AB}{tg40°}$ y $AC_1 + 50 = \frac{AB}{tg40°}$, luego $AC_1 = \frac{AB}{tg40°} - 50$. Por tanto $tg45° = \frac{AB}{\frac{AB}{tg40°} - 50}$.

Como $tg45° = 1$ se tiene $\frac{AB}{tg40°} - 50 = AB$, y al despejar AB se obtiene la altura de la montaña; $AB = \frac{50 \cdot tg40°}{1 - tg40°}$ metros.

Con una calculadora obtenemos 0'8391 como valor aproximado de $tg40°$. Así pues, la altura de la montaña es de unos 261 metros.

Problema 7

Calcúlense, sin usar calculadora, las razones trigonométricas del ángulo $\frac{5\pi}{12}$.

Solución. Observamos que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ y como las razones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$ nos son conocidas por teoría, podemos utilizar para calcular las razones pedidas las fórmulas para las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

Para hallar el coseno $\frac{5\pi}{12}$ (podríamos utilizar otra vez las fórmulas de las razones de la suma de ángulos) utilizamos la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (para despejar el coseno en función del seno) y así se obtiene:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\right)^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \left(\text{pues } \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \text{ y su coseno es positivo}\right).$$

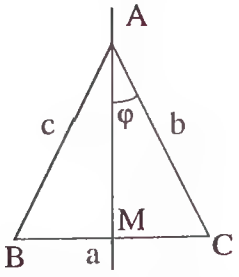
Para hallar la las restantes razones trigonométricas utilizamos el seno y el coseno:

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}, \quad \operatorname{cotg}\frac{5\pi}{12} = \frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)},$$

$$\sec\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{12}} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad \text{y} \quad \operatorname{cosec}\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}} = \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}.$$

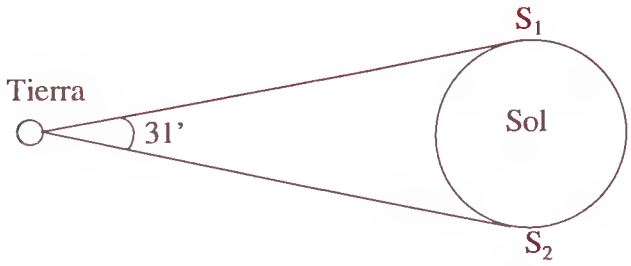
Problema 8

a) Sean a, b, c los lados de un triángulo isósceles ABC donde b = c y sea α el ángulo opuesto al lado a. Sea M el punto de corte de la perpendicular al lado a desde el vértice A. Probar que el ángulo φ de la figura mide exactamente la mitad de lo que mide α.



b) El sol está aproximadamente a 150 millones de kilómetros de la tierra. Usando un telescopio se ha medido el ángulo de la figura. ¿Cual es el diámetro del sol? (un diámetro es el

segmento S_1S_2).

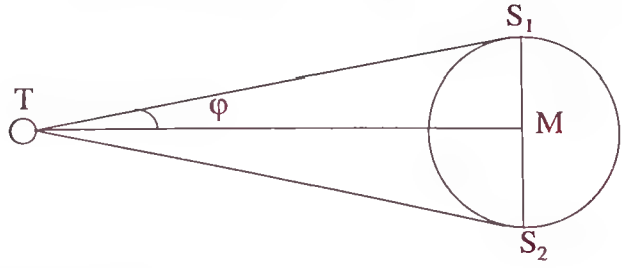


Solución.

a) Los triángulos rectángulos AMC y ABM poseen un cateto común, AM, y tienen hipotenusas con la misma medida, b = c. Al aplicar el teorema de Pitágoras (consulte el Problema 7 del Tema 10) se comprueba que MC = BM. Así pues, los triángulos rectángulos AMC y ABM son iguales pero con distinta orientación. Luego, el ángulo opuesto al lado MC en ACM, φ, es igual al ángulo opuesto al lado BM en AMB.

Como la suma de tales ángulos es precisamente α tenemos que $2\varphi = \alpha$.

b) El triángulo TS_1S_2 es isósceles y al aplicar el resultado del apartado a) se tiene que el



ángulo φ mide $\frac{31}{2} = 15'5' = 15'\,30''$.

El segmento TM mide la distancia estimada de la Tierra al Sol, es decir, 150 millones de kilómetros. Así pues, el diámetro del Sol mide: $S_1S_2 = 2MS_1 = 2\,(\text{tg}15'5')\,TM$.

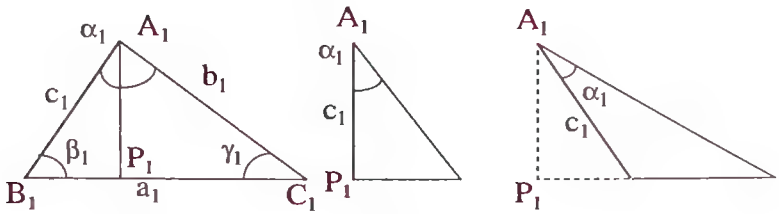
Como 60' son 1°, entonces 15'5' son $\frac{15'5'}{60} = 0'25833$ grados, y con una calculadora obtenemos que la tg15'5' es aproximadamente 0'004509. Luego, el diámetro del Sol mide aproximadamente 1'35 millones de kilómetros.

Problema 9

Sean dos triángulos de ángulos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, y de lados a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2, respectivamente, donde a_i es el lado opuesto al ángulo α_i, b_i es el lado opuesto al ángulo β_i y c_i es el lado opuesto al ángulo γ_i para i=1,2. Probar que si $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, c_1 = c_2$, entonces los triángulos dados son iguales.

Solución. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$, entonces $\gamma_1 = \pi - (\alpha_1 + \beta_1)$ y $\gamma_2 = \pi - (\alpha_2 + \beta_2)$ (pues la suma de los tres ángulos de un triángulo es π), luego, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Dependiendo de la medida de β_1 el triángulo puede tener una de las tres formas siguientes:



Tipo 1 Tipo 2 Tipo 3

En cada uno de los tres casos se tiene:

1er tipo de triángulo $\quad A_1P_1 = c_1 \operatorname{sen}\beta_1$,

2° tipo de triángulo $\quad A_1P_1 = c_1 = c_1 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = c_1 \operatorname{sen}\beta_1$,

3er tipo de triángulo $\quad A_1P_1 = c_1 \operatorname{sen}(\pi - \beta_1) = c_1 \operatorname{sen}\beta_1$,

es decir, en cualquier caso $A_1P_1 = c_1 \operatorname{sen}\beta_1$. Además, al conocer A_1P_1, en términos de c_1 y β_1, podemos determinar a_1 y b_1 en términos de c_1, γ_1 y β_1.

Para el 1er tipo de triángulo tenemos: $b_1 = \dfrac{A_1P_1}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \dfrac{c_1 \operatorname{sen}\beta_1}{\operatorname{sen}\gamma_1}$ y

$$a_1 = B_1P_1 + P_1C_1 = c_1 \cos\beta_1 + b_1 \cos\gamma_1 = c_1 \cos\beta_1 + c_1 \frac{\operatorname{sen}\beta_1 \cos\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_1}.$$

De forma análoga se obtienen expresiones para el 2° y 3er tipo de triángulo. También, se puede expresar a_2 y b_2 en términos de c_2, γ_2 y β_2.

Para el 1er tipo de triángulo tenemos: $b_2 = \dfrac{A_2P_2}{\operatorname{sen}\gamma_2} = \dfrac{c_2 \operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}\gamma_2}$ y

$$a_2 = B_2P_2 + P_2C_2 = c_2 \cos\beta_2 + b_2 \cos\gamma_2 = c_2 \cos\beta_2 + c_2 \frac{\operatorname{sen}\beta_2 \cos\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_2}.$$

De forma análoga se obtienen expresiones para el 2° y 3er tipo de triángulo.

Ahora bien, como $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ y además $c_1 = c_2$, entonces los dos triángulos dados tienen los tres lados iguales, por lo que son iguales.

Problema 10

a) Utilizar las fórmulas que relacionan el seno y el coseno de dos ángulos α y β con el seno y el coseno del ángulo $\alpha+\beta$ para obtener las fórmulas de la tangente de $\alpha+\beta$.

b) Obtener las fórmulas que expresan la tangente de $\alpha-\beta$ en función de la tangente de α y la tangente de β.

Solución. Suponemos $0 \le \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ y $0 \le \alpha-\beta < \frac{\pi}{2}$.

a) Por la definición de tangente tenemos: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$,

y al utilizar las fórmulas del seno y coseno de una suma de ángulos ($\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ y $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$) tenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

Al dividir numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$ se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}},$$

y al simplificar y utilizar nuevamente la definición de tangente,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

b) Análogamente a lo hecho en el apartado a) se inicia aplicando la definición de tangente.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$ (al aplicar las fórmulas $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ y $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$).

Al dividir numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$ se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ (al simplificar y utilizar la definición de tangente)

Problema 11

a) Utilizar las fórmulas que relacionan el seno y el coseno de dos ángulos α y β con el seno y el coseno del ángulo $\alpha+\beta$ para obtener el seno y el coseno del ángulo 2α en función de α.

b) Utilizar el apartado anterior para obtener la tangente de 2α en función de la de α.

c) Probar que se verifican las siguientes fórmulas:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Solución. Suponemos , $0 \le \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \le 2\alpha < \frac{\pi}{2}$

a) El ángulo 2α se puede expresar como $\alpha+\alpha$, así pues,

$$\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\operatorname{sen}\alpha)^2.$$

Conclusión: $\operatorname{sen}2\alpha = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\operatorname{sen}\alpha)^2$.

b) Análogamente, $\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Conclusión: $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

c) El ángulo α se puede expresar como $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ o, lo que es lo mismo, $2\,\frac{\alpha}{2}$, así pues,

$$\cos\alpha = \cos 2\frac{\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2, \qquad (11.1)$$

Como $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, entonces $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$. Al sustituir en (11.1),

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

de donde basta despejar el coseno de $\frac{\alpha}{2}$, $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Análogamente, como $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, basta sustituir en (11.1),

$$\cos\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\left(\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

y despejar el seno de $\frac{\alpha}{2}$, $\quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Por último, $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Problema 12

Pruébense las siguientes fórmulas para $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

a) $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ b) $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$

c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Solución. Si $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$, entonces se tiene $\gamma+\delta = \alpha$ y $\gamma-\delta = \beta$, luego:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\gamma+\delta) = \operatorname{sen}\gamma\cos\delta + \cos\gamma\operatorname{sen}\delta,$$
$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\gamma-\delta) = \operatorname{sen}\gamma\cos\delta - \cos\gamma\operatorname{sen}\delta,$$
$$\cos\alpha = \cos(\gamma+\delta) = \cos\gamma\cos\delta - \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\delta,$$
$$\cos\beta = \cos(\gamma-\delta) = \cos\gamma\cos\delta + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\delta.$$

a) Al sumar las dos primeras igualdades obtenemos directamente

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\gamma\cos\delta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

b) Al restar las dos primeras igualdades se obtiene:

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\gamma\operatorname{sen}\delta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

c) Al sumar las dos segundas igualdades se obtiene directamente

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\gamma\cos\delta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

d) Al restar las dos segundas igualdades se obtiene:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\delta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

TEMA 12

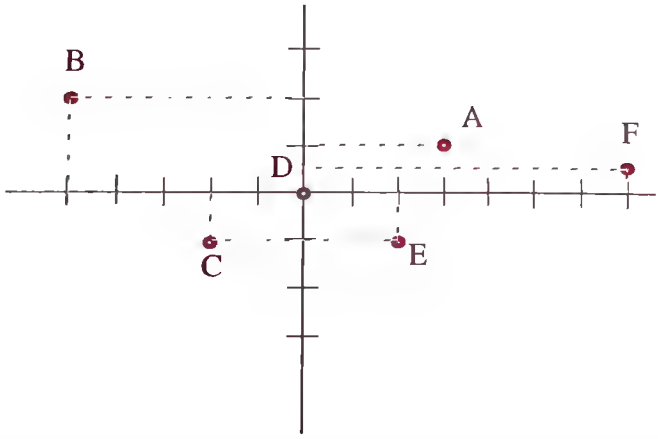
Introducción a la geometría analítica

Problema 1

Utilizar unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado para dibujar los siguientes puntos de coordenadas: A = (3,1), B = (-5,2), C = (-2,-1), D = (0,0), E = (2,-1), F = $(7,\frac{1}{2})$.

Decir a qué cuadrante pertenece cada punto.

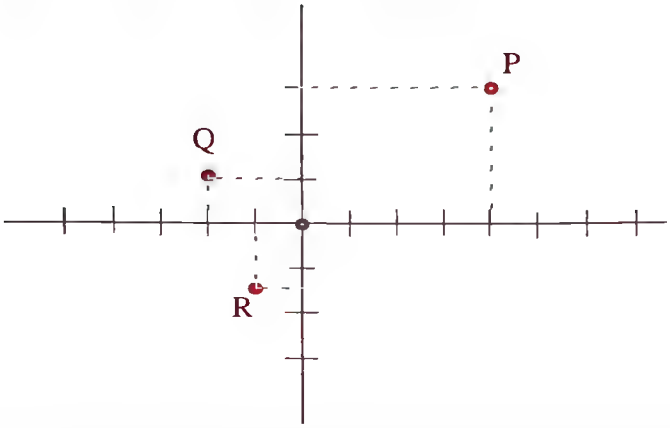
Solución. La primera coordenada (primer número de cada par) se contabiliza en el eje horizontal como una distancia desde el origen (punto de corte de los dos ejes) hacia la derecha si se trata de un número positivo y hacia la izquierda si se trata de un número negativo. Análogamente con la segunda coordenada (segundo número de cada par) salvo que hacia arriba si es un número positivo y hacia abajo si es un número negativo



Los puntos A, D y F pertenecen al primer cuadrante, los puntos B y D pertenecen al segundo, los puntos C y D al tercero y los puntos E y D al cuarto.

Problema 2

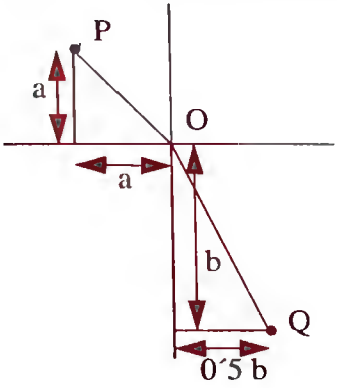
Hallar las coordenadas de los puntos P, Q y R de la figura siguiente.



Solución. El punto P tiene coordenadas (4,3), el punto Q tiene coordenadas (- 2,1) y el R tiene coordenadas $(-1, -\frac{3}{2})$.

Problema 3

Hallar las coordenadas de los puntos P y Q de la figura siguiente, sabiendo que OP mide



$\sqrt{2}$ y que OQ mide $\sqrt{5}$.

Solución. De la figura del enunciado tenemos que las coordenadas de P son (- a,a) y las de

Q son $(\frac{b}{2}, -b)$.

Como se observa en la figura tenemos dos triángulos rectángulos y se puede aplicar el teorema de Pitágoras a cada uno de los triángulos.

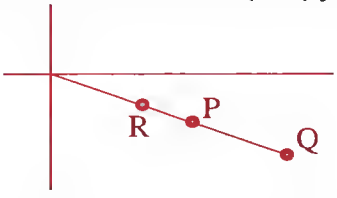
$$(OP)^2 = (\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad y \quad (OQ)^2 = (\sqrt{5})^2 = b^2 + (\frac{1}{2}b)^2 = \frac{5}{4}b^2,$$

luego, $a = 1$ y $b = 2$.

Conclusión: Las coordenadas son $(-1,1)$ para P y $(1,-2)$ para Q.

Problema 4

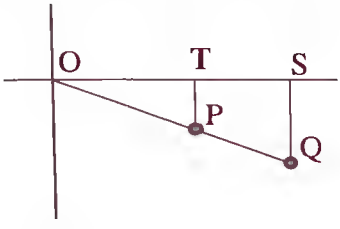
El punto P de la figura siguiente tiene coordenadas $(3,-1)$ y el punto Q tiene abcisa 5, en



cuanto al punto R no se tiene más información que la dada por la figura. ¿Cual es la ordenada de Q? ¿Qué se puede afirmar con respecto a las coordenadas de R?

Solución. Se denomina abcisa a la primera coordenada de un punto y ordenada a la segunda.

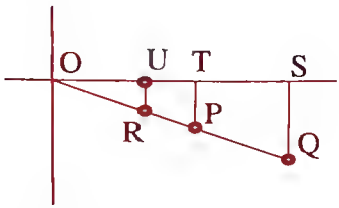
Sean $(5,-a)$ las coordenadas de Q donde $a > 0$. Por el teorema de Tales aplicado a los triángulos semejantes OPT y OQS de la figura siguiente tenemos que, $\frac{PT}{OT} = \frac{QS}{OS}$, así



$\frac{1}{3} = \frac{a}{5}$ con lo que $a = \frac{5}{3}$, por tanto las coordenadas de Q son $(5, -\frac{5}{3})$.

Sean (x,y) las coordenada del punto R. Por el Teorema de Tales aplicado a los triángulos

semejantes ORU y OPT tenemos $\frac{1}{3} = \frac{y}{x}$, luego $x = 3y$. Además, por estar R situado en

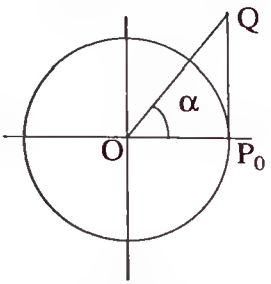


el segmento OP se tiene que $0 < x < 3$ y $0 > y > -1$.

Conclusión: Las coordenadas de Q son $(5,-\frac{5}{3})$ y las coordenadas (x,y) de R deben verificar $x = 3y$, $0 < x < 3$ y $0 > y > -1$.

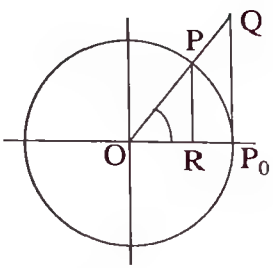
Problema 5

Probar que la tangente del ángulo α de la figura es la longitud P_0Q, supuesto que el radio de



la circunferecia es 1.

Solución. Al aplicar el teorema de Tales a los triángulos semejantes ORP y OP_0Q de la siguiente figura



obtenemos:

$$\frac{P_0Q}{RP} = \frac{OP_0}{OR}.$$

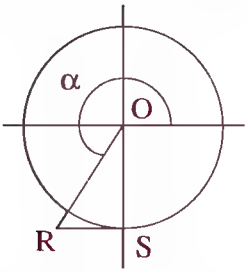
Como $OP_0 = 1$, $RP = \text{sen}\alpha$ y $OR = \cos\alpha$, entonces se tiene:

$$\frac{P_0Q}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

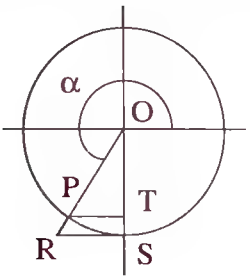
de donde $P_0Q = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha.$

Problema 6

¿Qué relación hay entre las razones trigonométricas del ángulo α de la figura y la longitud del segmento RS? Se supone que la circunferencia es de radio 1.



Solución. Al aplicar el Teorema de Tales a los triángulos ORS y OPT de la figura



obtenemos:

$$\frac{RS}{OS} = \frac{PT}{OT}.$$

Como $OS = 1$, $OT = -\text{sen}\alpha$ y $PT = -\cos\alpha$ (puesto que el seno y el coseno de este ángulo son números negativos), entonces se tiene:

$$\frac{RS}{1} = \frac{-\cos\alpha}{-\text{sen}\alpha} = \text{cotg}\alpha.$$

Conclusión: La longitud del segmento RS es el valor $\text{cotg}\alpha$.

Problema 7

Hallar las razones trigonométricas de los ángulos

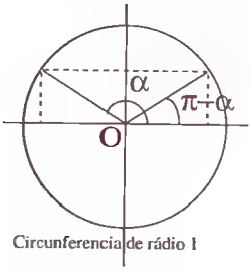
$$\text{a)}\ \alpha = \frac{7}{12}\pi \qquad \text{b)}\ \beta = 300^\circ$$

Solución.

a) Este ángulo se dibuja en el segundo cuadrante , así pues se considera el ángulo $\pi - \alpha = \pi - \frac{7}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi$ que pertenece al primer cuadrante y verifica que

$$\operatorname{sen}\frac{7}{12}\pi = \operatorname{sen}\frac{5}{12}\pi\ ,\quad \cos\frac{7}{12}\pi = -\cos\frac{5}{12}\pi \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\frac{7}{12}\pi = -\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi\ .$$

Las igualdades anteriores se observan en la figura siguiente.



Circunferencia de rádio 1

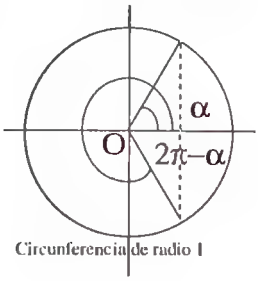
Las razones trigonométricas de $\frac{5}{12}\pi$ ya fueron calculadas en el Problema 7 del Tema 11.

b) Obsérvese que $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ radianes, con lo cual,

$$\operatorname{sen} 300^\circ = \operatorname{sen}(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \cos 300^\circ = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \operatorname{tg}(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

Las igualdades anteriores se observan en la figura siguiente:



Circunferencia de radio 1

Problema 8

Determinar los valores de $\text{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ sabiendo que $\text{tg}\alpha = a$ y además que

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ b) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Solución.

a) De las igualdades $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, se obtiene la ecuación

$$a = \frac{\text{sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}.$$

Al elevar al cuadrado cada miembro de la igualdad tenemos,

$$a^2 = \frac{\text{sen}^2\alpha}{1-\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow a^2 - a^2\,\text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\alpha = -\sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}} \\ \text{sen}\alpha = \sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}} \end{cases}.$$

Si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, entonces el seno debe ser un número negativo, luego,

$$\text{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}.$$

De la igualdad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ se obtiene,

$$\cos\alpha = \begin{cases} -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \\ \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{1-\dfrac{a^2}{1+a^2}} \\ \sqrt{1-\dfrac{a^2}{1+a^2}} \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{1+a^2}} \end{cases}.$$

De nuevo, por ser $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, el coseno es un número positivo, es decir,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}.$$

b) Por el mismo razonamiento que en el apartado anterior y debido a que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, el seno debe ser un número negativo, obtenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}.$$

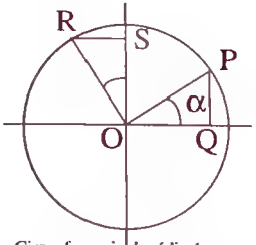
De nuevo, por ser $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, el signo del coseno es negativo, es decir,

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+a^2}}.$$

Problema 9

Obtener las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \frac{\pi}{2}$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, en términos de las razones trigonométricas del ángulo α.

Solución. Conviene estudiar la figura siguiente



Circunferencia de rádio 1

Sea α el ángulo de la figura. El ángulo con vértice O del triángulo ORS es también α, es decir los triángulos ORS y OPQ son iguales. Así pues,

$$PQ = \operatorname{sen}\alpha = RS \quad \text{y} \quad OQ = \cos\alpha = OS.$$

Por la definición de razones trigonométricas de ángulos mayores que $\frac{\pi}{2}$,

$$OS = \operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{y} \quad SR = -\cos(\alpha + \tfrac{\pi}{2}).$$

Luego,

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = OS = OQ = \cos\alpha \ , \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -RS = -PQ = -\operatorname{sen}\alpha \ ,$$

$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Problema 10

Hallar los ángulos α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, que verifican la ecuación:

a) $2\cos^2\alpha = 3(1-\text{sen}\alpha)$ b) $\cos\alpha + \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 0$

Solución. La estrategia a seguir consiste en dejar la ecuación en una única razón trigonométrica y sustituir dicha razón por una incógnita de forma que se tenga que resolver una ecuación polinómica, racional o algebraica.

a) De $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obtenemos $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$. Al sustituir en la ecuación tenemos

$$2(1-\text{sen}^2\alpha) = 3(1-\text{sen}\alpha),$$

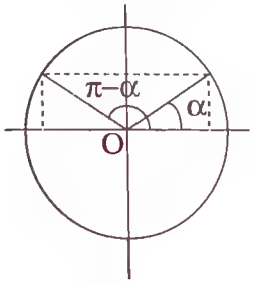
y al operar queda

$$2(\text{sen}^2\alpha) - 3\text{sen}\alpha + 1 = 0.$$

Se considera $t = \text{sen}\alpha$ y se reescribe la ecuación de la forma $2t^2 - 3t + 1 = 0$, cuyas soluciones son $t = 1$ y $t = \frac{1}{2}$. (los ángulos que verifican la ecuación del enunciado son aquellos cuyo seno es 1 ó 0´5).

Si $\text{sen}\alpha = 1$, entonces $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Si $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha = \frac{\pi}{6}$ o $\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ (véase la figura).



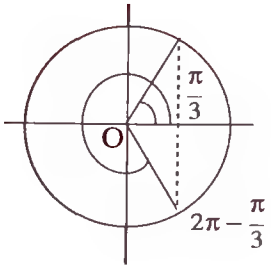
b) Al sustituir $\text{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$ en la ecuación obtenemos:

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad .$$

Se considera $t = \cos\alpha$ y se obtiene la ecuación de segundo grado $2t^2 + t - 1 = 0$, cuyas soluciones son $t = -1$ y $t = \frac{1}{2}$ (los ángulos que verifican la ecuación son aquellos cuyo coseno es -1 ó 0,5).

Si $\cos\alpha = -1$, entonces $\alpha = \pi$.

Si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, entonces o bien $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o bien $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$ (véase figura).


π/3
O
2π − π/3

TEMA 13

Vectores del plano

Problema 1

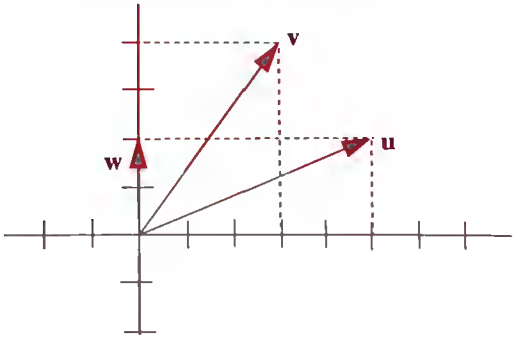
a) Representar gráficamente los vectores $\mathbf{u}=(5,2)$, $\mathbf{v}=(3,4)$ y $\mathbf{w}=(0,2)$.

b) Calcular la norma de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

c) Hallar las coordenadas de los vectores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ y $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}-4\mathbf{w}$.

Solución.

a) La primera coordenada del vector se valora sobre el eje horizontal y la segunda sobre el eje vertical.



b) Al aplicar la definición de norma se tiene:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}\ ,\ \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5\ ,\ \|\mathbf{w}\| = \sqrt{0+2^2} = 2.$$

c) Por la definición de las operaciones entre vectores del plano se tiene:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (5,2)+(3,4) = (5+3,2+4) = (8,6),$$

$$\mathbf{v}-\mathbf{u} = (3,4)-(5,2) = (3,4)+(-5,-2) = (3-5,4-2) = (-2,2),$$

$$2\mathbf{u}+3\mathbf{v}-4\mathbf{w} = 2\cdot(5,2)+3\cdot(3,4)-4\cdot(0,2) = (10,4)+(9,12)-(0,8) = (19,8).$$

Problema 2

Sean tres vectores de coordenadas $\mathbf{u} = (a,5)$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3},1)$ y $\mathbf{w} = (1,b)$.

a) Determínense a y b de forma que el vector $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ tenga de coordenadas (5,2).

b) Determínense a y b para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ formen un ángulo de $\frac{\pi}{4}$, medido de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$.

Solución.

a) En primer lugar determinamos las coordenadas del vector $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$,

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w} = 2(a,5) - (\sqrt{3},1) + 3(1,b) = (2a - \sqrt{3} + 3,\ 10 - 1 + 3b) = (3 - \sqrt{3} + 2a,\ 9 + 3b).$$

Hemos de hallar los valores de a y de b para que este vector tenga coordenadas (5,2), entonces

$$(3 - \sqrt{3} + 2a,\ 9 + 3b) = (5,2) \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad 2a - \sqrt{3} + 3 = 5 \quad \text{y} \quad 9 + 3b = 2.$$

Luego:

$$a = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{2 - 9}{3} = -\frac{7}{3}.$$

b) De la definición del producto escalar se obtiene que el coseno del ángulo φ formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ viene dado por:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|},$$

y como si $\varphi = \frac{\pi}{4}$, entonces $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene:

$$\cos\varphi = \frac{(\sqrt{3}, 1)\ (1, b)}{\sqrt{3+1}\sqrt{1+b^2}} = \frac{\sqrt{3}+b}{2\sqrt{1+b^2}}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{\sqrt{3}+b}{2\sqrt{1+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{o sea} \quad \sqrt{3}+b = \sqrt{2(1+b^2)}.$$

Por verificarse la igualdad también se verifica la igualdad de los cuadrados de cada miembro (sin embargo no es cierto que si los cuadrados de dos números son iguales tales números lo sean). Entonces

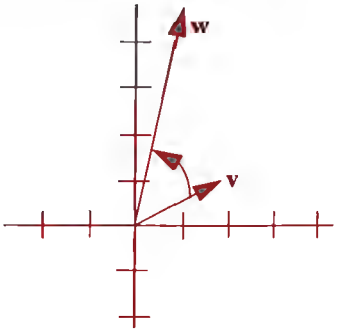
$$3 + b^2 + 2\sqrt{3}\ b = 2(1 + b^2), \quad \text{es decir} \quad b^2 - 2\sqrt{3}\ b - 1 = 0,$$

que es una ecuación de segundo grado en incógnita b de soluciones

$$b = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{12+4}}{2} = \sqrt{3} - 2 \quad \text{y} \quad b = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12+4}}{2} = \sqrt{3} + 2.$$

De las dos soluciones de la ecuación de segundo grado sólo una solución es válida como

solución del problema, pues de acuerdo con la figura siguiente, la segunda coordenada de **w** tiene que ser positiva y $\sqrt{3}-2$ es negativo. Luego, $b = \sqrt{3}+2$.



Problema 3

Determinar aquellos vectores de norma 2 tales que su producto escalar con el vector de coordenadas (1,1) es 1.

Solución. Sean (x,y) las coordenadas de un vector en las condiciones pedidas. Por tener norma 2 se tiene $\sqrt{x^2+y^2} = 2$, luego $x^2+y^2 = 4$.

Por otra parte, como $(x,y)\cdot(1,1) = 1$, entonces $x+y = 1$.

Se han de verificar simultáneamente las ecuaciones

$$x^2+y^2 = 4 \quad y \quad x+y = 1.$$

De la ecuación de lineal despejamos la incógnita y; $y = 1 - x$, y sustituimos esta en la segunda obteniendo la ecuación $x^2+(1-x)^2 = 4$.

Al desarrollar el cuadrado, la ecuación se reescribe como $2x^2 - 2x - 3 = 0$, de soluciones

$$x = \frac{2-\sqrt{4+24}}{4} = \frac{2-\sqrt{28}}{4} = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \quad , \quad x = \frac{2+\sqrt{4+24}}{4} = \frac{2+\sqrt{28}}{4} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

De $y = 1 - x$ se obtienen los valores de y para cada valor de x:

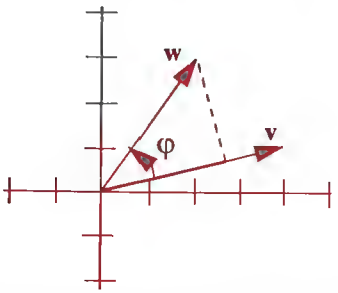
$$y = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \quad e \quad y = \frac{1-\sqrt{7}}{2}.$$

Luego, las soluciones son:

$$\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \quad y \quad \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right).$$

Problema 4

Dados los vectores $\mathbf{v} = (4,1)$ y $\mathbf{w} = (2,3)$, calcúlese la longitud de la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}$, como indica la figura:



Solución. Llamemos x a la longitud pedida y φ al ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Para determinar la proyección de $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}$, se traza por el extremo de $\mathbf{w}$ la recta perpendicular a la recta que contiene al vector $\mathbf{v}$ y que pasa por el extremo de $\mathbf{w}$. De esta forma se construye un triángulo rectangulo, así pues, el coseno de φ está dado por

$$\cos\varphi = \frac{x}{\|\mathbf{w}\|}, \quad \text{de lo cual se tiene} \quad x = \|\mathbf{w}\|\cos\varphi.$$

Por otro lado $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}$ (de la definición de producto escalar), entonces

$$x = \|\mathbf{w}\|\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(4,1)\cdot(2,3)}{\sqrt{16+1}} = \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{11\sqrt{17}}{17}.$$

Problema 5

Demostrar que para cada par de vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se verifica que los siguientes vectores

$$\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v},$$

son vectores ortogonales. Interpretar geométricamente el vector $\mathbf{u}$.

Solución. Para probar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son ortogonales comprobaremos que su producto escalar es nulo. Nótese que $\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}$ es un número. Al aplicar las propiedades del producto escalar se tiene

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0.$$

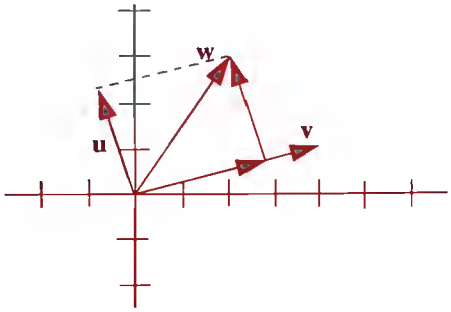
Luego, los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son ortogonales.

Veamos ahora la interpretación geométrica del resultado anterior. El vector $\mathbf{w}$ se puede

expresar (descomponer) como suma de dos vectores: $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$.

Uno que es proporcional al vector $\mathbf{v}$ ($\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\cdot\mathbf{v}$) y otro que es ortogonal a $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u}$) (véase la figura).

El vector proporcional a $\mathbf{v}$ en esta descomposición de $\mathbf{w}$, $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$, es el producto del



vector $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ que es un vector proporcional a $\mathbf{v}$ y de módulo 1, y el número $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|}$ que es lo que mide la proyección del vector $\mathbf{w}$ sobre $\mathbf{v}$ (como se ve en el problema 4).

Conclusión: $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{w}$ sobre un vector ortogonal al vector $\mathbf{v}$.

Problema 6

Sea ABCD un paralelogramo. Mediante el producto escalar, demuéstrese que:

a) ABCD es un rombo si y solo si sus diagonales son perpendiculares.

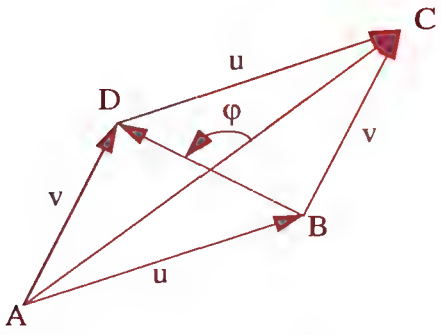
b) La suma de los cuadrados de las longitudes de los lados del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

Solución.

a) El rombo es un paralelogramo tal que las longitudes de los lados son iguales. Sea $\mathbf{u}$ el vector que une los puntos A y B, que es el mismo que une los puntos D y C, y $\mathbf{v}$ el vector que une los puntos B y C, que es el mismo que une los puntos A y D,

$$\overline{AB} = \overline{DC} = \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \overline{BC} = \overline{AD} = \mathbf{v} \ .$$

(En un paralelogramo los lados opuestos, es decir aquellos que no tienen extremos comunes, son iguales).



Las diagonales son los segmentos AC y BD y además $\overline{AC} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\overline{BD} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$. Si φ es el ángulo formado por las diagonales como se muestra en la figura, se tiene,

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|\cos\varphi,$$

pero también, $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2$. Luego,

$$\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2 = AC\cdot BD\cdot\cos\varphi.$$

Si las diagonales son perpendiculares, entonces $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ y $\cos\varphi = 0$, por lo tanto, $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2$ y (como las normas son números positivos) $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, es decir el paralelogramo es un rombo.

Recíprocamente, si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, entonces de la igualdad

$$\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2 = AC\cdot BD\cdot\cos\varphi,$$

se tiene $AC\cdot BD\cdot\cos\varphi = 0$. Como las longitudes AC y BD no pueden ser nulas, resulta $\cos\varphi = 0$ y, por tanto, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Dado que $\overline{AC} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ y que $\overline{BD} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$, tenemos

$$(AC)^2+(BD)^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2.$$

Al desarrollar el segundo miembro de la anterior igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\|\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\|\mathbf{u}\|^2 = \\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{v}\|^2 = (AB)^2+(CD)^2+(AD)^2+(BC)^2.\end{aligned}$$

Así pues, $(AC)^2+(BD)^2 = (AB)^2+(CD)^2+(AD)^2+(BC)^2$.

Problema 7

Estudiar si los siguientes pares de vectores son linealmente dependientes o independientes:

a) $\mathbf{v} = (3,2)$, $\mathbf{w} = (0,1)$. b) $\mathbf{v} = (0,0)$, $\mathbf{w} = (-1,1)$. c) $\mathbf{v} = (-1,-1)$, $\mathbf{w} = (7,7)$.

Solución.

a) Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son son linealmente dependientes si existen números a y b distintos de cero tales que el vector $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$ sea el vector nulo. Son linealmente independientes si la única posibilidad de que $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$ sea el vector nulo es que $a = b = 0$.

El vector $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$ se expresa en coordenadas como

$$a(3,2) + b(0,1) = (3a + 0, 2a + b),$$

y este vector es cero si

$$3a = 0 \quad y \quad 2a + b = 0,$$

o sea, $a = b = 0$.

Conclusión: Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes.

b) Se verifica que $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = a(0,0) + 0 \cdot \mathbf{w} = (0,0)$, con a un número distinto de cero cualquiera.

Conclusión: Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo, (0,0), es siempre linealmente dependiente.

c) El vector $\mathbf{w} = (7,7)$ es proporcional al vector $\mathbf{v} = (-1,-1)$, ya que $(7,7) = (-7)(-1,-1)$. Luego, el vector $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$ es igual al vector nulo para $a = 1$ y $b = 7$,

$$a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = (7,7) + 7(-1,-1) = (0,0)$$ (obsérve que los coeficientes no son nulos).

Conclusión: Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 8

Probar que los vectores $\mathbf{v} = (1,1)$ y $\mathbf{w} = (2,1)$ son linealmente independientes. ¿Constituyen estos vectores una base ortonormal de vectores del plano?. Obténgase las coordenadas del vector $\mathbf{u} = (-1, \frac{1}{2})$ repecto a la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

Solución. Para probar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente independientes hemos de suponer que se verifica la ecuación $a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w} = (0,0)$ y comprobar que los números a y b deben ser nulos. En efecto, si $a(1,1) + b(2,1) = (0,0)$, entonces $(a + 2b, a + b) = (0,0)$. Así pues, se obtiene el sistema al igualar coordenada a coordenada

$$a + 2b = 0$$
$$a + b = 0,$$

cuya única solución es $a = 0$, $b = 0$. Luego $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores linealmente independientes.

Como dos vectores linealmente independientes en los vectores del plano constituyen una base de estos vectores, entonces $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es una base.

Para que se trate de una base ortonormal se debe cumplir que los vectores sean ortogonales (es decir, de producto escalar nulo) y las normas de dichos vectores de la base sean 1. Sin embargo, en

este caso se tiene que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1,1) \cdot (2,1) = 2+1 = 3 \quad , \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{5},$$

por lo tanto, la base $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ no cumple ninguna de las condiciones necesarias para ser ortonormal.

Las coordenadas del vector $\mathbf{u} = (-1, \frac{1}{2})$ respecto a la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son (a,b) que son desconocidas, es decir, $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$;

$$(-1, \frac{1}{2}) = a(1,1) + b(2,1) = (a + 2b, a + b).$$

Al igualar coordenada a coordenada se obtiene el sistema

$$a + 2b = -1$$
$$a + b = \frac{1}{2}$$

cuya solución es $a = 2, b = -\frac{3}{2}$.

Conclusión: Las coordenadas del vector $\mathbf{u} = (-1, \frac{1}{2})$ respecto a la base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son $(2, -\frac{3}{2})$.

Problema 9

Sea $\mathbf{u}$ el vector de coordenadas (3,-4) respecto a la base $\{(1,1), (5,7)\}$ (coordenadas respecto a la base canónica) del plano. Determinar las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ respecto a las bases:

a) $\{(1,0),(0,1)\}$ b) $\{(1,-3),(2,2)\}$. (coordenadas respecto a la base canónica).

Solución.

a) Como u tiene coordenadas (3,-4) respecto a la base $\{(1,1), (5,7)\}$, entonces

$$\mathbf{u} = 3(1,1) + (-4)(5,7) = (3,3) + (-20,-28) = (-17,-25).$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} = (-17,-25)$ respecto a la base canónica (la base canonica es $\{(1,0),(0,1)\}$).
(Comprobación: $(-17)(1,0) + (-25)(0,1) = (-17,0) + (0,-25) = (-17,-25)$).

b) Para hallar las coordenadas de $\mathbf{u}$ respecto a la base $\{(1,-3), (2,2)\}$, hemos de hallar los números x e y que verifican:

$$(-17,-25) = x(1,-3) + y(2,2) = (x+2y, -3x+2y),$$

igualdad que equivale al sistema:

$$-17 = x + 2y$$
$$-25 = -3x + 2y$$

cuya solución es $x = 2, y = \frac{-19}{2}$. Luego, $(2, \frac{-19}{2})$ son las coordenadas de $\mathbf{u}$ respecto a la base $\{(1,-3), (2,2)\}$ (Comprobación: $2(1,-3) + (\frac{-19}{2})(2,2) = (2,-6) + (-19,-19) = (-17,-25)$).

Problema 10

Dados los vectores $\mathbf{v} = (1,3)$ y $\mathbf{w} = (-6,b)$ hallar el valor de b para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean ortogonales. A continuación, hallar una base ortonormal $\{\mathbf{v}',\mathbf{w}'\}$ tal que $\mathbf{v}'$ es proporcional a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}'$ es proporcional a $\mathbf{w}$ y expresar el vector (1,0) como combinación lineal de $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{w}'$ (hallar las coordenadas de (1,0) respecto a la base $\{\mathbf{v}',\mathbf{w}'\}$).

Solución. Para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean ortogonales su producto escalar debe ser cero, así pues,

$$(1,3)(-6,b) = -6+3b = 0, \quad \text{de donde} \quad b=2.$$

Para obtener ahora una base ortonormal cuyos vectores sean proporcionales a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ bastará con multiplicar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ por el inverso de su norma.

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{1+9}}(1,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$\mathbf{w}' = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{36+4}}(-6,2) = \left(\frac{-6}{\sqrt{40}}, \frac{2}{\sqrt{40}}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

(observe que $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$).

Las coordenadas del vector (1,0) respecto de la base $\{\mathbf{v}',\mathbf{w}'\}$ son (x, y) tales que:

$$(1,0) = x\mathbf{v}' + y\mathbf{w}' = x\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) + y\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \left(\frac{x-3y}{\sqrt{10}}, \frac{3x+y}{\sqrt{10}}\right).$$

Luego, x e y son las soluciones del siguiente sistema:

$$1 = \frac{x-3y}{\sqrt{10}}$$

$$0 = \frac{3x+y}{\sqrt{10}}$$

de donde $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $y = \frac{-3}{\sqrt{10}}$. Es decir, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ son las coordenadas pedidas.

(Dado que $\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ forman una base ortonormal, entonces las coordenadas de (1,0) son las proyecciones sobre $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{w}'$. Como se ve en el problema 4 tales proyecciones se pueden calcular usando el producto escalar. Así:

$$x = \frac{(1,0)\cdot \mathbf{v}'}{\|\mathbf{v}'\|} = (1,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y = \frac{(1,0)\cdot \mathbf{w}'}{\|\mathbf{w}'\|} = (1,0)\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{-3}{\sqrt{10}}.)$$

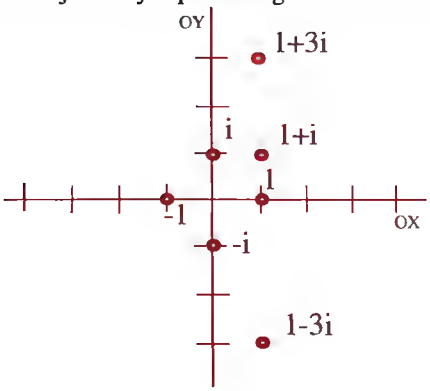
TEMA 14

Números complejos

Problema 1

Represente gráficamente los números complejos siguientes: 1, i, -1, -i, 1 + i, 1 + 3i, 1 - 3i.

Solución. El número complejo a + bi se representa como el punto del plano (a,b), es decir, la parte real se valora sobre el eje OX y la parte imaginaria sobre el eje OY.



Problema 2

a) Dados los números $z_1 = -1 + 3i$ y $z_2 = 2 - i$. Calcular: $\overline{z_1}$, $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ y $\overline{z_1 - z_2}$.

b) Demostrar que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ para cualquier par de números complejos z_1 y z_2.

Solución.

a) $\overline{z_1} = \overline{-1+3i} = -1-3i$ (el conjugado de un número tiene la misma parte real y parte imaginaria opuesta).

$z_1 + z_2 = (-1+3i) + (2-i) = -1+2+3i-i = 1+2i$ (la suma tiene de parte real la suma de las partes reales y de parte imaginaria la suma de partes imaginarias).

$z_1 \cdot z_2 = (-1+3i) \cdot (2-i) = -2+i+6i-3i^2$ (el producto de dos números complejos se realiza como el producto de dos binomios), y como $i^2 = -1$, entonces $z_1 \cdot z_2 = -2+i+6i-3(-1) = 1+7i$.

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(-1+3i)-(2-i)} = \overline{-1-2+3i+i} = \overline{-3+4i} = -3-4i$.

b) Sean los números $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$. Veamos que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i} =$$

$$= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i =$$

$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Veamos $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ desarrollando que cada miembro. Por un lado:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2} =$$

$$= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

y por otra parte:

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)} \cdot \overline{(a_2 + b_2 i)} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) =$$

$$a_1 a_2 - a_1 b_2 i - b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2) i,$$

y como coinciden queda probada la igualdad.

Problema 3

Calcúlese:

a) $(2-3i)^2$ b) $(2-3i)(2+3i)$ c) $\dfrac{1+i}{1-i}$

d) $\dfrac{(4-3i)(1+i)}{3-i}$ e) $\dfrac{1}{i}$ f) $\dfrac{i^{305}}{i^{512} - i^{30}}$

Solución.

a) Desarrollamos esta potencia aplicando la fórmula del binomio de Newton,

$(2 - 3i)^2 = 2^2 - 6i + 3^2 i^2 = 4 - 9 - 6i = -5 - 6i$ (pues $i^2 = -1$).

b) Operamos como un producto de binomios

$$(2 - 3i)(2 + 3i) = 2.2 + 2.3i - 3.2i - 3.3i^2 = 4 + 9 + 6i - 6i = 13.$$

c) Para dividir dos números complejos se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\,\overline{(1-i)}}{(1-i)\,\overline{(1-i)}} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-1+2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i.$$

d) Operamos como en los apartados anteriores

$$\frac{(4-3i)(1+i)}{3-i} = \frac{4+4i-3i-3i^2}{3-i} = \frac{7+i}{3-i}$$ (multiplicamos numerador y divisor por el conjugado del denominador) $$\frac{7+i}{3-i} = \frac{(7+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{21+7i+3i-1}{9+1} = \frac{20+10i}{10} = 2+i.$$

e) Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i.$$

f) Para calcular $\dfrac{i^{305}}{i^{512} - i^{30}}$, en primer lugar calculamos las potencias i^{305}, i^{512} e i^{28}.

Como $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$, entonces agruparemos las potencias de i de cuatro en cuatro, para ello, dividimos 305 entre 4 y obtenemos que $305 = 4 \cdot 76 + 1$,

luego, $i^{305} = i^{4.76+1} = (i^4)^{76} i^1 = (1)^{76} i = i$.

Del mismo modo se tiene que:

$i^{512} = i^{4.128} = (i^4)^{128} = (1)^{128} = 1$; $i^{30} = i^{4.7+2} = (i^4)^7 i^2 = (1)^7 (-1) = -1$.

Así pues, $$\frac{i^{305}}{i^{512} - i^{30}} = \frac{i}{1-(-1)} = \frac{i}{2} = \frac{1}{2}i.$$

Problema 4

Hállense la parte real e imaginaria de cada uno de los siguientes números complejos:

a) $\dfrac{(a+bi)+2}{(a+bi)-2}$, b) $\dfrac{(3+2i)i^{13}}{i^{275}(1-i^3)}$.

Solución.

a) $\dfrac{(a+bi)+2}{(a+bi)-2} = \dfrac{(a+2)+bi}{(a-2)+bi}$ (multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denonunador)

$$\frac{(a+2)+bi}{(a-2)+bi} = \frac{((a+2)+bi)((a-2)-bi)}{((a-2)+bi)((a-2)-bi)} =$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)-(a+2)bi+b(a-2)i+b^2}{(a-2)^2+b^2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-4-4bi}{a^2+b^2-4a+4} = \frac{a^2+b^2-4}{a^2+b^2-4a+4} - \frac{4bi}{a^2+b^2-4a+4}.$$

Así pues, la parte real es $\frac{a^2+b^2-4}{a^2+b^2-4a+4}$ y la parte imaginaria es $-\frac{4b}{a^2+b^2-4a+4}$.

b) Comenzamos calculando las potencias de i que aparecen en la expresión del enunciado:

$i^{13} = i^{4.3+1} = (i^4)^3 i = (1)^3 i = i$, $i^{275} = i^{4.68+3} = i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$ y $i^3 = -i$.

Al sustituir estas potencias por sus valores tenemos:

$$\frac{(3+2i)i}{(-i)(1+i)} = \frac{i}{(-i)}\frac{3+2i}{1+i} = \frac{-3-2i}{1+i} = \frac{(-3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{-3+3i-2i-2}{1+1} = \frac{-5+i}{2} = -\frac{5}{2}+\frac{i}{2}.$$

Así pues, la parte real es $-\frac{5}{2}$ y la parte imaginaria es $\frac{1}{2}$.

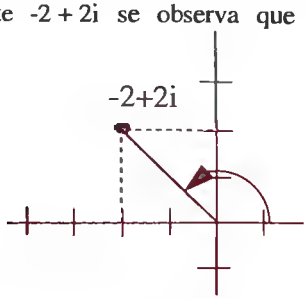
Problema 5

Escribir los números complejos $-2+2i$ y $1-\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica.

Solución. En primer lugar escribimos el número $-2+2i$ en forma trigonométrica.

El módulo de $-2+2i$ es $\|-2+2i\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Al representar gráficamente $-2+2i$ se observa que su argumento es un ángulo



comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π. Además, el argumento de $-2+2i$, α, verifica que $tg\alpha = \frac{2}{-2} = -1$.

Como por el Tema 12 sabemos que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ y que $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, entonces $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, y por tanto, el número -2 + 2i se escribe como $2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + \operatorname{isen}\frac{3\pi}{4})$.

Ahora nos ocupamos del número $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

El módulo de $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ es $\|1 - \sqrt{3}\mathrm{i}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Al representar el número $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ se observa que el argumento de $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ es un ángulo comprendido entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π y cuya tangente es $\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$.

Como por el Tema 12 sabemos que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ y que $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, entonces $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, y por tanto, el número $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ se escribe como $2\,(\cos\frac{5\pi}{3} + \operatorname{isen}\frac{5\pi}{3})$.

Problema 6

Escribir los números $4\,(\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{isen}\frac{\pi}{3})$ y $2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{isen}\frac{5\pi}{4})$ en forma binómica.

Solución. Para escribir $4\,(\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{isen}\frac{\pi}{3})$ en forma binómica basta recordar que por el Tema 11 sabemos que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ y que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Así pues, tenemos:

$$4\,(\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{isen}\frac{\pi}{3}) = 4\,(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

En cuanto a $2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{isen}\frac{5\pi}{4})$, hemos de conocer el seno y el coseno de $\frac{5\pi}{4}$. Para ello, utilizamos las fórmulas del Tema 12: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$.

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\,(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\,(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\,(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\operatorname{sen}\,(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, $2\,(\cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{isen}\frac{5\pi}{4}) = 2\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

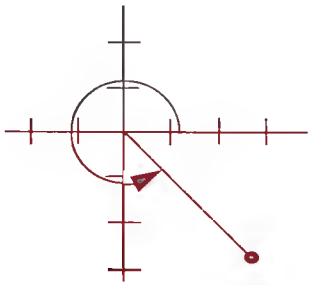
Problema 7

Calcular z^8, donde $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$, escribiendo primero z en forma trigonométrica.

Solución. Comenzaremos por escribir $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ en forma trigonométrica.

Su módulo es $\|2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i\| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$.

La representación gráfica de z muestra que el argumento de $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ es un ángulo comprendido entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, y su tangente es $\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1$.



Como por el Tema 12 sabemos que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ y que $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, entonces $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Por tanto, el número $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ se escribe como $4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

Para hallar ahora la potencia octava del número complejo aplicamos la fórmula de Moivre:

$$(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)^8 = \left(4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)\right)^8 = 4^8\left(\cos 8\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen} 8\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 65536\,(\cos 14\pi + i\operatorname{sen} 14\pi) = 65536\,(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 65536.$$

(En el tema 26 se definen con rigor el seno y el coseno de valores no comprendidos entre 0 y 2π. El seno y el coseno que necesitamos se define como el seno y el coseno del ángulo conseguido a partir del dado sumando o restando un múltiplo apropiado de 2π hasta conseguir un ángulo entre 0 y 2π. El múltiplo adecuado es el cociente entero de la división del ángulo dado por 2π. En el caso particular de este problema $\operatorname{sen}(14\pi) = \operatorname{sen}(0 + 7\cdot 2\pi) = \operatorname{sen} 0$ y $\cos(14\pi) = \cos(0 + 14\pi) = \cos 0$).

Problema 8

Calcular las raíces cúbicas de la unidad y designarlas por z_0, z_1 y z_2.

a) Representar gráficamente z_0, z_1 y z_2.

b) Probar que dos de tales raíces z_1 y z_2 son números conjugados y que $z_1 \cdot z_2 = 1$.

c) Comprobar que z_1 y z_2 son raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. El número complejo 1 se expresa en forma trigonométrica como $1(\cos 0 - i\,\mathrm{sen}\,0)$.

Las raíces enésimas de un número complejo en forma trigonométrica vienen dadas por la siguiente fórmula: $\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right)$,

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Al aplicar la fórmula anterior tenemos:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0)} = 1\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right), \text{ con } k = 0, 1 \text{ y } 2.$$

- Para $k = 0$, tenemos $z_0 = \cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0}{3}\right) = 1$.
- Para $k = 1$,

$$z_1 = \cos\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0+2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

(recuérdese que $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$),

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

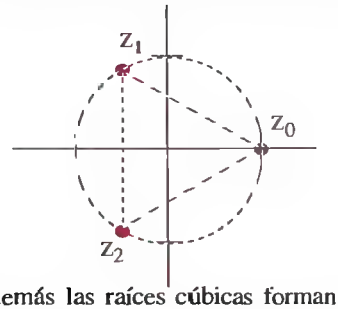
- Para $k = 2$,

$$z_2 = \cos\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0+4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

(recuérdese que $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ y $\mathrm{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left(\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$),

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

a) Obsérvese que todas las raíces de la unidad están sobre la circunferencia de radio 1 (son



números complejos de módulo 1) y además las raíces cúbicas forman los vértices de un triángulo equilátero.

b) Es evidente que $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ son conjugadas. Además,

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = \|z_1\| = 1.$$

c) Resolvemos la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, obteniendo las raíces:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

que son precisamente z_1 y z_2. (Véase el Problema 10).

Problema 9

Calcúlense las raíces cuartas de -16.

Solución. El número complejo -16 se expresa en forma trigonométrica $16(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi)$ Entonces tenemos:

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \text{ con } k=0,\ 1,\ 2 \text{ y } 3.$$

- Para $k = 0$, tenemos $z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}+\sqrt{2}i.$

- Para $k = 1$, $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right);$

$$z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$$

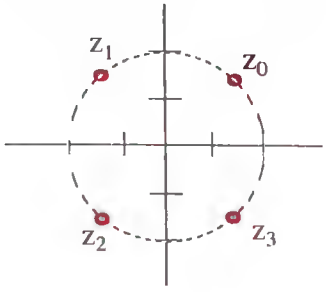
- Para $k = 2$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right),$

$$z_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

- Para $k = 3$, $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right),$

(recuerde que $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\mathrm{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$), $z_3 = \sqrt{2}-\sqrt{2}i.$

Obsérvese que las raíces forman los vértices de un cuadrado.



Problema 10

Probar que si a es un número real positivo, entonces las raíces cuadradas de -a son $-\sqrt{a}i$ y $\sqrt{a}i$. Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + 5 = 0$, b) $x^2 - 2x + 10 = 0$,

c) $4x^2 - 4x + 101 = 0$, d) $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Solución. El número -a se expresa en forma trigonométrica como $a(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$. Por la fórmula de Moivre las raíces cuadradas de $a(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$ son:

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{a}i,$$

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi+2\pi}{2}\right) = \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{a}i.$$

Así pues escribiremos $\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}i$ (obsérvese que $\sqrt{a}$ es un número real, pues a es un número real positivo).

a) $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \sqrt{-5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}i$. Es decir las raíces de la ecuación son $\sqrt{5}i$ y $-\sqrt{5}i$.

b) Al aplicar la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado, tenemos las raíces de la ecuación:

$$\frac{-(-2) + \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2+\sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}i}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

(obsérvese que $\dfrac{-(-2) - \sqrt{4-40}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{-36}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{36}i}{2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$).

c) Las raíces de la ecuación son:

$$\frac{4 + \sqrt{16 - (4 \cdot 4 \cdot 101)}}{2} = \frac{4 + \sqrt{-1600}}{2} = \frac{4 \pm 40i}{2} = 2 \pm 20i.$$

d) Las raíces de la ecuación son:

$$\frac{6 + \sqrt{36 - (4 \cdot 13)}}{2} = \frac{6 + \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

TEMA 15

Vectores del espacio

Problema 1

Averígüese si son linealmente independientes los vectores siguientes:

a) (0,1,1), (1,1,0), (0,1,0), (1,0,1).

b) (1,1,0), (0,1,2), (-1,0,1).

c) (1,1,1), (0,1,2).

Solución.

a) Cuatro vectores en el espacio son siempre linealmente dependientes. Comprobémoslo en este caso.

Sean a, b, c y d números reales tales que:

$a(0,1,1) + b(1,1,0) + c(0,1,0) + d(1,0,1) = (0,0,0)$,

$a(0,1,1) + b(1,1,0) + c(0,1,0) + d(1,0,1) = (0,a,a) + (b,b,0) + (0,c,0) + (d,0,d) =$

$= (b + d, a + b + c, a + d) = (0,0,0)$,

entonces (al igualar coordenada a coordenada) obtenemos el sistema:

$$b + d = 0$$
$$a + b + c = 0$$
$$a + d = 0$$

Para que los vectores sean linealmente dependientes se debe verificar que el sistema tenga solución no nula. Este sistema homogéneo es de cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones, luego, el rango de la matriz de coeficientes es menor que 4, luego (por el Teorema de Rouché para la discusión de sistemas homogéneos), se trata de un sistema compatible indeterminado. Así pues, existen soluciones del sistema no nulas y los vectores son linealmente dependientes.

b) Para estudiar si los vectores son linealmente dependientes hemos de ver si existen números a, b, c, no todos nulos de modo que:

$a(1,1,0) + b(0,1,2) + c(-1,0,1) = (0,0,0)$ ($(a,a,0)+(0,b,2b)+(-c,0,c)=(a-c, a+b, 2b+c)=(0,0,0)$),

Es decir, hemos de estudiar si el siguiente sistema tiene soluciones no nulas:

$$a - c = 0$$
$$a + b = 0$$
$$2b + c = 0.$$

Que el sistema homogéneo anterior tenga soluciones no nulas es equivalente a que la matriz de los coeficientes de dicho sistema tenga rango menor que el número de incógnitas, es decir,

$$\text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} < 3.$$

Sin embargo, como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces $\text{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3.$

Por tanto, a = b = c = 0 y los vectores son linealmente independientes.

c) En lugar de proceder como en los apartados anteriores, nos basamos en el hecho de que dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si sus coordenadas son proporcionales. En este caso: $a(1,1,1) = (0,1,2)$, lo que equivale a que $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, que es evidentemente imposible. Por tanto los dos vectores son linealmente independientes.

Problema 2

Dados los vectores $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1,w_2,w_3)$, probar que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes si y solo si $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Solución. Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente independientes si y solo si supuesto que existen tres números a, b y c tales que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$, entonces se comprueba que se debe verificar $a = b = c = 0$. Ahora bien, al escribir los vectores **u**, **v** y **w** en coordenadas se tiene que la condición $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$ equivale a que el siguiente sistema homogéneo sea compatible y determinado,

$$au_1 + bv_1 + cw_1 = 0$$
$$au_2 + bv_2 + cw_2 = 0$$
$$au_3 + bv_3 + cw_3 = 0$$

Por tanto, los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente independientes si el sistema anterior solo tiene la solución $a = b = c = 0$. Para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser tres, es decir, el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo,

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Problema 3

Dados los vectores (1,-1,1), (2,3,5), (1,-6,0), probar que constituyen una base del espacio y hallar las coordenadas del vector (-2,-13,-5) respecto de la base dada.

Solución. En primer lugar hemos de ver que los vectores dados son linealmente independientes, para ello, aplicamos el enunciado del Problema 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -12-5-3+30 = 10 \neq 0 \ ,$$

luego, son vectores linealmente independientes.

Para comprobar que es una base demostraremos que estos vectores linealmente independientes son sistema generador aunque tal cosa no es necesaria (tres vectores del espacio linealmente independientes son siempre sistema generador y por tanto forman una base). Veamos que todo vector del espacio es combinación lineal de los vectores dados. Sea (x, y, z) un vector cualquiera del espacio, hemos de probar que existen números a, b, c tales que:

$$(x, y, z) = a(1,-1,1) + b(2,3,5) + c(1,-6,0),$$

o, lo que es lo mismo,

$$(x,y,z) = (a,-a,a) + (2b,3b,5b) + (c,-6c,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (a + 2b + c\,, -a + 3b - 6c\,,\ a + 5b),$$

que el sistema siguiente con incógnitas a, b, c siempre tiene solución para cualquier x, y, z.

$$\begin{aligned} a+2b+c &= x \\ -a+3b-6c &= y \\ a+5b \quad &= z \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que la matriz de los coeficientes tiene determinante no nulo (calculamos tal determinante para probar que los vectores eran linealmente independientes). Por tanto, la matriz de los coeficientes de dicho sistema tiene rango 3.

Como el rango de la matriz ampliada no es mayor que tres sean quienes sean x, y, z, entonces el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada coinciden y es 3. Luego el sistema siempre tiene solución única. Así pues, los vectores son sistema generador, y por ser linealmente indepedientes y sistema de generadores forman una base.

Por último, dado el vector (-2,-13,-5), hemos de encontrar los números a, b, c tales que

$$(-2,-13,-5) = a(1,-1,1) + b(2,3,5) + c(1,-6,0).$$

Es decir hemos de resolver el sistema $\begin{cases} a + 2b + c = -2 \\ -a + 3b - 6c = -13 \\ a + 5b = -5 \end{cases}$.

La solución es $a = -5, b = 0, c = 3$. Luego, las coordenadas del vector $(-2,-13,-5)$ respecto de la nueva base son $(-5,0,3)$.

Problema 4

Dados $\mathbf{v} = (1, -2b, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, -1, -4c)$, determinar los valores de b y c para que:

a) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente dependientes.

b) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean ortogonales.

Solución.

a) Para que los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente dependientes deben ser proporcionales. es decir, debe existir un número real a tal que $a\mathbf{v} = \mathbf{w}$. En coordenadas tenemos:

$$a(1, -2b, 2) = (3, -1, -4c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a(-2b) = -1 \\ 2a = -4c \end{cases}.$$

Al resolver el sistema se obtienen los valores pedidos son $b = \frac{1}{6}$ y $c = -\frac{3}{2}$.

b) Para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean ortogonales debe ser su producto escalar nulo,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1,-2b,2) \cdot (3,-1,-4c) = 1 \cdot 3 + (-2b) \cdot (-1) + 2(-4c) = 3 + 2b - 8c = 0.$$

Por tanto, todo par de números b y c verificando $3 + 2b - 8c = 0$, es solución para este apartado, por ejemplo para $b = 0$ y $c = \frac{3}{8}$.

Problema 5

a) Calcúlense los valores de b y c de forma que el vector (6,b,c) sea combinación lineal de $\mathbf{u} = (-2,1,3)$ y $\mathbf{v} = (0,4,-1)$.

b) Hállese el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Solución.

a) (6,b,c) es combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ si existen dos números reales r y s tales que

$$(6,b,c) = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}.$$

$$(6,b,c) = r(-2,1,3) + s(0,4,-1) = (-2r, r + 4s, 3r - s),$$

luego, el siguiente sistema con incógnitas r y s debe poseer solución:

$$\left.\begin{array}{l} 6=-2r \\ b=r+4s \\ c=3r-s \end{array}\right\}$$

Para que el sistema anterior tenga solución debe verificarse que el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada, y como aquella es una matriz 3x2 (cuyo rango como máximo es dos) mientras que ésta es una matriz 3x3 (cuyo rango puede ser tres), una primera condición es que el rango de la matriz de ampliada sea menor que 3, es decir que su determinante sea nulo. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & b \\ 3 & -1 & c \end{vmatrix} = -8c - 6 - 72 - 2b = -78 - 2b - 8c = 0 \Leftrightarrow -39 - b - 4c = 0.$$

Como la matriz de los coeficientes tiene al menos rango dos, pues $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, entonces el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada es dos siempre que $-39 - b - 4c = 0$.

Luego, para cada par de valores b y c tales que $-39 - b - 4c = 0$ se tiene que (6,b,c) es combinación lineal de **u** y **v**.

b) El coseno del ángulo α que forman los vectores **u** y **v** viene dado por:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(-2,1,3)\cdot(0,4,-1)}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{0+16+1}} = \frac{0+4-3}{\sqrt{14}\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{238}} = \frac{\sqrt{238}}{238},$$

luego, el ángulo que forman **u** y **v** es aquel comprendido entre 0 y π cuyo coseno es $\frac{\sqrt{238}}{238}$.

Problema 6

Dados los vectores **v** = (1,0,-1) y **w** = (-2,1,0), hallar un vector ortogonal a ambos y unitario.

Solución. El producto vectorial de **v** y **w** es un vector ortogonal a ambos,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} e_3 = (1,2,1).$$

Para obtener un vector ortogonal a **v** y **w**, y unitario basta obtener un vector de norma uno proporcional al vector (1,2,1). Así tenemos que una solución al problema es:

$$\frac{1}{\|(1,2,1)\|}(1,2,1) = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}}(1,2,1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Problema 7

Dados los puntos $A=(3,1,0)$, $B=(0,1,3)$ y $C=(3,0,1)$, calcúlese el área del triángulo ABC.

Solución. El vector libre representado por el vector fijo AB es

$$\mathbf{v} = (0-3,1-1,3-0) = (-3,0,3),$$

y el vector libre representado por AC es

$$\mathbf{w} = (3-3,0-1,1-0) = (0,-1,1).$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, que en este caso es:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3e_1+3e_2+3e_3 = (3,3,3),$$

y, por tanto, $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.

Conclusión: El área del triángulo ABC es $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Problema 8

Constrúyase una base ortonormal $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ tal que $\mathbf{u}$ sea proporcional al vector $(1,2,0)$ y $\mathbf{w}$ sea de la forma $(a,0,c)$.

Solución. Dado que $\mathbf{u}$ debe ser proporcional a $\mathbf{t} = (1,2,0)$, entonces debemos multiplicar $\mathbf{t}$ por un número k para que tenga módulo 1, $\mathbf{u} = k\cdot\mathbf{t}$. Como $\|k\cdot\mathbf{t}\| = |k|\cdot\|\mathbf{t}\| = 1$, basta tomar $k = \dfrac{1}{\|\mathbf{t}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Así $\mathbf{u} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{t} = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$.

El vector $\mathbf{v}$ debe ser de la forma $(a,0,c)$ y ortogonal a $\mathbf{u}$ por tanto, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, es decir,

$$\mathbf{u}\cdot(a,0,c) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)\cdot(a,0,c) = \frac{\sqrt{5}}{5}a+0+0 = 0,$$

de donde $a = 0$, así pues, el vector $\mathbf{v}$ debe de ser proporcional al vector $(0,0,c)$. Como $\mathbf{v}$ tiene que tener norma 1, entonces c es 1 ó -1. Tomemos, por ejemplo, $\mathbf{v} = (0,0,1)$.

Por último, tomamos $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$, pues $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen norma 1 y son ortogonales, entonces $\mathbf{w}$ también tiene norma 1.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e_3,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right).$$

Problema 9

Dados $\mathbf{u} = (1,3,1)$, $\mathbf{v} = (2,0,1)$, $\mathbf{w} = (2,1,2)$, calcúlese $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ y verifíquese que es igual al determinante de la matriz cuyas líneas son las coordenadas de cada vector.

Solución. Calculamos en primer lugar $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$,

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} e_3 .$$

Ahora efectuamos el producto escalar por $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (2,1,2)\cdot\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right),$$

la expresión anterior corresponde al desarrollo por los menores correspondientes a la primera fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Es decir,

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (2,1,2)\cdot((1,3,1)\times(2,0,1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 .$$

En general, dados tres vectores $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1,w_2,w_3)$, utilizando los mismos cálculos anteriores se tiene:

$$\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} .$$

Problema 10

Pruébese que el conjunto de las matrices 2x2 tiene estructura de espacio vectorial con la suma de matrices y el producto de un número por una matriz. Constrúyase una base de tal espacio vectorial. ¿Cúal es la dimensión?.

Solución. La suma de matrices 2x2 verifica las propiedades siguientes:

1.- Asociativa, es decir, $A+(B+C)=(A+B)+C$ para cualquiera de las matrices A, B y C. En efecto:

Sean $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ tres matrices 2x2 cualesquiera,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} \end{bmatrix}.$$

Así pues,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

2.- Existe elemento neutro que es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, es decir, si $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cualquiera, entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

3.- Para cada matriz existe matriz opuesta, es decir, dada una matriz cualquiera $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

existe la matriz $\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.- Conmutativa, es decir, $A + B = B + A$ para cualquier par de matrices A y B. En efecto:

Sean $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ dos matrices cualquiera, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}.$$

Así pues, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$

Además, se cumplen las siguientes propiedades para el producto de un escalar y una matriz. Sean $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ dos matrices cualquiera y λ, μ dos números arbitrarios, entonces

a) $$\lambda\left(\mu\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu a_{11} & \lambda\mu a_{12} \\ \lambda\mu a_{21} & \lambda\mu a_{22} \end{bmatrix} = (\lambda\mu)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

b) $$\lambda\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

c) $$(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)a_{11} & (\lambda+\mu)a_{12} \\ (\lambda+\mu)a_{21} & (\lambda+\mu)a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \lambda a_{12}+\mu a_{12} \\ \lambda a_{21}+\mu a_{21} & \lambda a_{22}+\mu a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

d) $1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Así pues, el conjunto de matrices 2x2 con la suma y el producto por un número tiene estructura de espacio vectorial.

Las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ constituyen una base de este espacio vectorial.

Son un sistema generador pues cualquier matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se puede expresar como combinación lineal de estos elementos,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Son un conjunto de vectores linealmente independientes. Supuestos que existen cuatro números a, b, c y d tales que

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, luego, $a = b = c = d = 0$.

Finalmente, dado que la base tiene cuatro elementos podemos afirmar que el espacio vectorial de las matrices 2x2 tiene dimensión 4.

TEMA 16

Geometría analítica en el plano

Problema 1

Sea la recta $r = \{P \in E_2: P \text{ tiene coordenadas } (1,1) + t(2,1); t \in \mathbf{R}\}$.

a) ¿Pertenece el punto $A = (3,0)$ a la recta r?

b) Determinar tres puntos de la recta r y dibujar esta recta.

c) Escribir una ecuación paramétrica y una ecuación implícita de r.

Solución. Para cada valor del parámetro t obtenemos un punto de la recta r y todos los puntos de r se obtienen de valores de t.

a) Para que el punto A pertenezca a la recta es necesario y suficiente que exista un valor t_0 que verifique:

$$(1,1) + t_0(2,1) = (3,0) \text{ , esto es, } (1+2t_0, 1+t_0) = (3,0).$$

Entonces t_0 debe verificar las ecuaciones: $1 + 2t_0 = 3$ y $1 + t_0 = 0$.

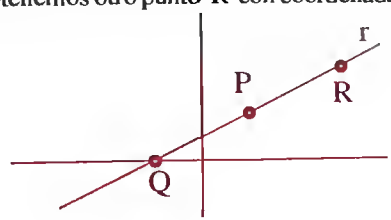
De la segunda ecuación resulta $t_0 = -1$, pero -1 no satisface la primera ecuación, por tanto, el punto $A = (3,0)$ no pertenece a la recta r.

b) Para obtener tres puntos de r basta dar a t tres valores distintos:

Para $t = 0$, obtenemos $P = (1,1)$.

Para $t = -1$, obtenemos otro punto Q de coordenadas $(1,1) - (2,1) = (-1,0)$.

Para $t = 1$, obtenemos otro punto R con coordenadas $(1,1) + (2,1) = (3,2)$.



c) Los puntos $P = (x,y)$, de la recta r tienen coordenadas $(x,y) = (1+2t, 1+t)$ para algun t.

Entonces, $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \end{cases}$, es una ecuación paramétrica de la recta r.

Para obtener una ecuación cartesiana o implícita de r basta eliminar el parámetro t, para ello, si restamos dos veces la segunda ecuación de la primera ecuación se obtiene:

$$x - 2y = 1+2t-2-2t \Rightarrow x-2y+1 = 0.$$

Problema 2

Sea r la recta con ecuación paramétrica, $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases}$:

a) Determinar dos puntos en la recta y un vector de dirección de ésta.

b) Hallar una ecuación implícita de la recta r.

Solución. Los puntos de r son los de coordenadas (x,y) que satisfacen el sistema y basta hacer que t recorra los números reales para obtener los pares (x,y) que son coordenadas de puntos de r.

a) Si $t = 0$, entonces $x = 1$ e $y = 2$, luego (1,2) es un punto, P, de la recta. Si $t = -1$, entonces $x = 3$ e $y = 1$, luego (3,1) es un punto, Q, de la recta r.

De la ecuación paramétrica se observa que los puntos de r tienen sus coordenadas de la forma $(x,y) = (1-2t, 2+t)$, por tanto, $(x,y) = (1,2) + t(-2,1)$. Así pues, de la última igualdad resulta que un vector de dirección es (-2,1) (todos los proporcionales a (-2,1) son los vectores de dirección de r).

b) Si eliminamos el parámetro t de la ecuación paramétrica (sumando la primera ecuación mas dos veces la segunda), obtenemos una ecuación implícita.

$$x + 2y = 1 - 2t + 4 + 2t \Rightarrow x + 2y - 5 = 0.$$

Problema 3

Hallar una ecuación paramétrica de la recta **r** que pasa por los puntos de coordenadas (0,1) y (3,1). Determinar una ecuación implícita de r.

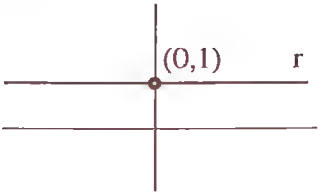
Solución. Como los puntos $A = (0,1)$ y $B = (3,1)$ están en la recta r, entonces el vector $\mathbf{v}_{AB} = (3,1) - (0,1) = (3,0)$ es un vector de dirección de la recta. Además, si $P = (x,y)$ es cualquier otro punto de la recta entonces el vector $\mathbf{v}_{AP} = (x,y) - (0,1)$ también es vector de dirección de r. Luego, $\mathbf{v}_{AB}$ y $\mathbf{v}_{AP}$ son vectores de coordenadas proporcionales, es decir,

$$(x,y) - (0,1) = t(3,0) \Rightarrow (x,y) = (0,1) + t(3,0) \Rightarrow (x,y) = (3t,1) \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \end{cases},$$

donde este sistema es una ecuación paramétrica de la recta r.

Las ecuaciones de este sistema nos dicen que la primera coordenada de los puntos de la

recta, x, recorre todos los valores posibles de **R** mientras la segunda coordenada, y, es siempre 1. Luego, r es una recta horizontal que corta al eje de ordenadas en (0,1). Por tanto, una ecuación implícita de r es $y = 1$.



Problema 4

Escribir una ecuación implícita de la recta s que contiene al punto A = (3,1) y es paralela a la recta r de ecuación $2x - y + 10 = 0$.

Solución. Las rectas paralelas a la recta $2x - y + 10 = 0$ son aquellas que tienen una ecuación cartesiana o implícita de la forma $2x - y + c = 0$. Así pues, la recta s tiene una ecuación cartesiana de la forma mencionada.

Como s pasa por A = (3,1), entonces las coordenadas de este punto verifican la ecuación tipo $2x - y + c = 0$, es decir $2 \cdot 3 - 1 + c = 0$, luego $c = -5$.

Una ecuación cartesiana de la recta s es $2x - y - 5 = 0$.

Problema 5

Averiguar cual es la posición relativa de las rectas r y s y si se cortan determínese el ángulo que forman entre sí. Las ecuaciones de r y s son respectivamente:

a) r: $x - y + 2 = 0$; s: $x - 3 = 0$.
b) **r**: $2x - 3y - 13 = 0$; s: $3x + 2y = 0$.
c) r: $x - y = 7$; s: $5x - 5y = 2$.
d) **r**: $3x - y = 1$; s: $6x - 2y = 2$.

Solución. Determinar la posición relativa de un par de rectas consiste en comprobar si son paralelas, se cortan o coinciden. El ángulo que forman las rectas r y s entre sí es por definición el menor ángulo formado por un vector de dirección de r, **u**, y un vector de dirección de s, **v**.

Si α *es el ángulo formado por* r *y* s, *el ángulo formado por* **u** y **v** *es* α *o* $\pi - \alpha$ (véase la

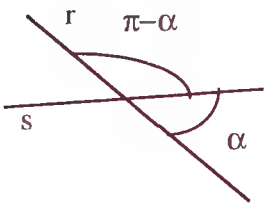


figura). *Por tanto, para calcular el ángulo entre dos rectas* r *y* s *basta tomar un vector de dirección de* **r**, **u**, *y un vector de dirección de* s, **v**, *si el ángulo formado por* **u** *y* **v**, γ, *es*

agudo, entonces γ *es el ángulo formado por* r *y* s, *si* γ *no es agudo entonces* $\pi-\gamma$ *es el ángulo formado por* r *y* s.

a) Si hay puntos comunes en las dos rectas, entonces las coordenadas de esos puntos verifican cada una de las dos ecuaciones que representan a las rectas r y s. Así pues, hemos de resolver el sistema formado por las dos ecuaciones para determinar los posible puntos comunes de las dos rectas.

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, entonces el sistema tiene solución única y tal solución nos da las coordenadas del punto de corte de las dos rectas (de la segunda ecuación $x = 3$ y al sustituir x en la primera $3 - y + 2 = 0$ se tiene $y = 5$. (3,5) es el punto de corte.).

Dada una recta con ecuación implícita $ax + by + c = 0$, *entonces el vector de coordenadas* (a,b) *es un vector ortogonal a cualquier vector de dirección de la recta, por tanto, los vectores de dirección tienen coordenadas* (a',b') *que verifican* $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$ (producto escalar nulo). *Como caso particular se tiene que los vectores* (-b,a) *o* (b,-a) *son vectores de dirección de la recta pues cumplen que el producto escalar con* (a,b) *es nulo* (obsérvese que si $v = (s,t)$ es un vector de dirección de una recta r entonces r admite una ecuación implícita de la forma $tx - sy + k = 0$).

Los vectores de la dirección de r son aquellos cuyas coordenadas (x_0,y_0) verifican la ecuación $x_0 - y_0 = 0$, tomamos $x_0 = 1$ y entonces $1 - y_0 = 0$, de donde $y_0 = 1$. Por tanto, $\mathbf{v} = (1,1)$ es un vector de dirección de r.

Los vectores de la dirección de s son aquellos de coordenadas (x_1,y_1) que verifican $x_1 = 0$, por ejemplo, $\mathbf{w} = (0,1)$.

A continuación determinamos el ángulo formado por **v** y **w**,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{(1,1)\cdot(0,1)}{\sqrt{1+1}\sqrt{0+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Luego, el ángulo que forman las recta r y s es $\frac{\pi}{4}$.

b) Análogamente, $\begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Como la matriz de coeficientes, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tiene rango 2 (ya que su determinante es distinto de cero), entonces el sistema posee solución única. Luego, las rectas r y s se cortan en el punto $A = (2,-3)$ que se obtiene al resolver el sistema.

Los vectores de la dirección, (x,y), de r verifican la igualdad $2 \cdot x - 3 \cdot y = 0$, tomamos $x = 3$ y obtenemos ($2 \cdot 3 - 3y = 0$, de donde) $y = 2$, luego (3,2) es un vector de la dirección de r. Los de s verifican $3 \cdot x + 2 \cdot y = 0$, y para $x = 2$ obtenemos ($3 \cdot 2 + 2y = 0$, de donde) $y = -3$, luego (2,-3) es un vector de la dirección de s.

Como el producto escalar de los vectores es nulo, entonces los vectores son ortogonales, y

por tanto, el ángulo que forman r y s es $\frac{\pi}{2}$, es decir, las rectas son perpendiculares.

c) Procedemos como en los apartados anteriores estudiando el sistema $\begin{cases} x - y = 7 \\ 5x - 5y = 2 \end{cases}$ que en este caso es sistema es incompatible (la matriz de los coeficientes tiene rango 1 mientras que la matriz ampliada tiene rango 2). Luego las rectas no tienen ningún punto en común, es decir son rectas paralelas.

d) Análogamente estudiamos el sistema, $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado (pues la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 1).

Las dos ecuaciones del sistema son proporcionales (la segunda se obtiene de la primera multiplicando por 2). Así pues, ambas ecuaciones definen el mismo conjunto de puntos en el plano, es decir la misma recta. Luego las rectas r y s coinciden.

Problema 6

Dada una recta r y escrita su ecuación de la forma $y = mx + n$, con m y n números reales, se denomina pendiente de la recta r al número m.

a) Hállense las pendientes de las rectas siguientes:

1) $3x + 2y - 8 = 0$.

2) $\begin{cases} x = \frac{3}{5} - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}t \end{cases}$, con $t \in \mathbf{R}$.

3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$.

4) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3}$.

b) Interprétese geométricamente la pendiente de una recta.

c) Demuéstrese que dos rectas que no admiten ecuaciones de la forma $x + a = 0$, son paralelas si y sólo si sus pendientes coinciden.

d) Hállese la recta que pasa por el punto $A = (-2,1)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$.

Solución.

a)

1) De la ecuación implícita de la recta dada $3x + 2y - 8 = 0$ se despeja y, $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

Por tanto, la pendiente es $m = -\frac{3}{2}$.

2) Eliminando el parámetro t en la ecuación paramétrica de la recta obtenemos:

$$-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{5}\right) = 3\left(y-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x-\frac{3}{5} = -2\left(y-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Por tanto, la pendiente es $m = -\frac{1}{2}$.

3) Análogamente, $\frac{x}{2}+\frac{y}{5} = 1 \Rightarrow y = 5\left(-\frac{x}{2}+1\right) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x+5.$

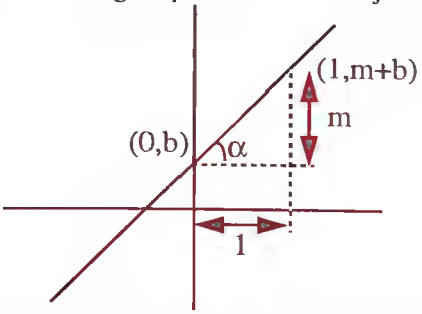
Por tanto, la pendiente es $m = -\frac{5}{2}$.

4) Reescribimos la ecuación de la recta,

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-3)+4 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x+4-\frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}.$$

Por tanto, en este caso la pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

b) Si la recta r tiene la ecuación $y = mx + b$, con m y b números reales, entonces la recta r pasa por los puntos (0,b) y (1,m + b). Observando la figura se deduce que $m = tg\alpha$ (pues se trata de un triángulo rectángulo), siendo α el ángulo que forma r con el eje de abcisas.



Conclusión: La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abcisas; eje X.

c) Se trata de una consecuencia inmediata del anterior apartado b) pues dos rectas paralelas forman el mismo ángulo con el eje de abcisas. Sin embargo, se puede probar analíticamente como sigue. Consideremos las rectas r y s con ecuaciones $y = mx + b$, $y = nx + c$ respectivamente. Entonces, unas ecuaciones paramétricas de estas rectas son:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = b + mt \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = c + nt \end{cases}$$

Por tanto, un vector de dirección de r es $\mathbf{u} = (1,m)$, y un vector de dirección de s es el vector $\mathbf{v} = (1,n)$. Por consiguiente: r es paralela a s si y sólo si $D(r) = D(s)$ que equivale a decir que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son proporcionales, es decir, $(1,m) = q \cdot (1,n)$ para algún $q \in \mathbf{R}$.

Ahora bien, $(1,m) = q \cdot (1,n)$ para algún $q \in \mathbf{R}$ si y sólo si $q = 1$ y $m = qn$, es decir, $m = n$.

Conclusión: Dos rectas son paralelas si y sólo si sus pendientes coinciden.

d) Como la recta tiene pendiente $\frac{3}{2}$, su ecuación es de la forma: $y = \frac{3}{2}x + b$, con $b \in \mathbf{R}$.

Como la recta pasa por el punto A = (-2,1), entonces sus coordenadas verifican la ecuación de la recta, y al sustituir estas coordenadas en la ecuación anterior se tiene que $1 = -3 + b$, es decir, $b = 4$.

Por tanto, la ecuación de la recta que se pide es $y = \frac{3}{2}x + 4$ (también podíamos haberla obtenido directamente de: $y - 1 = \frac{3}{2}(x + 2)$).

Problema 7

a) Obtener la relación existente entre las pendientes de dos rectas perpendiculares.

b) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto A = (4,-6) y es perpendicular a la recta $y = 2x+1$.

Solución.

a) Si la recta r y s tienen la ecuación $y = mx + b$ e $y = nx + c$ respectivamente, entonces (como se muestra en el Problema 6) el vector $\mathbf{u} = (1,m)$ es de dirección de r y $\mathbf{v} = (1,n)$ es de dirección de s.

r es perpendicular a s si y solo si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, es decir, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1,m) \cdot (1,n) = 1 + m \cdot n$, tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $m \cdot n = -1$ o, lo que es lo mismo, $n = -\frac{1}{m}$.

Conclusión: Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

b) La pendiente de la recta $y = 2x + 1$ es $m = 2$, luego, la pendiente de la recta perpendicular r debe ser $n = -\frac{1}{2}$ (así $m \cdot n = -1$).

La ecuación de r es: $y - (-6) = -\frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 4$,

y en forma cartesiana o implícita: $\frac{1}{2}x + y + 4 = 0$, también, $x + 2y + 8 = 0$.

Problema 8

Calcular la distancia entre el punto P = (1,3) y la recta r de ecuación $y - 2x - 5 = 0$.

Solución. El punto P no está en la recta pues sus coordenadas no verifican la ecuación de ésta. Determinamos la recta perpendicular a $y - 2x - 5 = 0$ que pasa por el punto A.

La pendiente de la recta r es 2 (ya que su ecuación se puede escribir $y = 2x+5$), luego la pendiente de cualquier recta perpendicular a r es $-\frac{1}{2}$.

Una ecuación de la recta s que pasa por P y es perpendicular a r es: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, y una ecuación cartesiana de ésta es $y + \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = 0$, o también $x + 2y - 7 = 0$.

A continuación determinamos el punto de corte de las dos rectas. Las coordenadas del punto de corte Q de las rectas r y s verifican las ecuaciones de las rectas y vienen dadas por las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} -2x + y - 5 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{de solución } x = -\frac{3}{5},\ y = \frac{19}{5}.$$

El punto de corte de las dos rectas es $Q = (-\frac{3}{5}, \frac{19}{5})$. La distancia entre las dos rectas es la distancia de P a Q que es: $d = \sqrt{(1 - (-\frac{3}{5}))^2 + (3 - \frac{19}{5})^2} = \sqrt{\frac{16}{5}}$.

Problema 9

Dados dos puntos distintos del plano, A y B, se llama mediatriz del segmento determinado por A y B a la recta que pasa por el punto medio de dicho segmento y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos A y B.

a) Hallar la mediatriz del segmento determinado por los puntos A = (1,3) y B = (5,7).

b) Hallar una ecuación del conjunto de los puntos P del plano tales que d(P,A) = d(P,B), siendo A y B los puntos del apartado a). Comparar con el resultado de a).

Solución.

a) El punto medio M del segmento determinado por A y B cumple que el vector que une los puntos A y M es la mitad del vector que une A y B. Así pues, si $M = (x_0, y_0)$ entonces

$$\mathbf{v}_{AM} = (x_0, y_0) - (1,3) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{AB} = (5,7) - (1,3) = (4,4),$$

$$(x_0, y_0) - (1,3) = \frac{1}{2}(4,4) \Rightarrow (x_0, y_0) = (1,3) + \frac{1}{2}(4,4) = (3,5) \Rightarrow M = (3,5).$$

Un vector en la dirección de la recta que pasa por los puntos A y B es $\mathbf{v}_{AB} = (4,4)$, por tanto, un vector ortogonal es $\mathbf{w} = (-4,4)$ y la mediatriz es la recta de ecuación,

$$\frac{(x-3)}{-4} = \frac{(y-5)}{4} \Rightarrow 4(x-3) + 4(y-5) = 0 \Rightarrow 4x + 4y - 32 = 0.$$

b) La condición d(P,A) = d(P,B) es equivalente a $(d(P,A))^2 = (d(P,Q))^2$.

Si P = (x,y) entonces la condición anterior se expresa como

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-7)^2,$$

y al desarrollarla,

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 \Rightarrow 8x + 8y - 64 = 0.$$

Esta última ecuación es, por tanto, la ecuación del conjunto de los puntos P del plano que verifican $d(P,A) = d(P,B)$. Observemos que este conjunto es una recta.

En el apartado anterior hemos obtenido la recta $4x + 4y - 32 = 0$ mientras que en este el resultado ha sido la recta $8x + 8y - 64 = 0$. Obsérvese que $8x + 8y - 64 = 2(4x + 4y - 32) = 0$, y así $8x + 8y - 64 = 0$ equivale a $4x + 4y - 32 = 0$, luego las dos rectas coinciden.

Conclusión: Hemos probado que la mediatriz del segmento determinado por los puntos A y B coincide con el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos A y B. Esta conclusión es cierta para todo par de puntos distintos del plano, es decir, la mediatriz del segmento determinado por dos puntos distintos del plano es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dichos dos puntos.

Problema 10

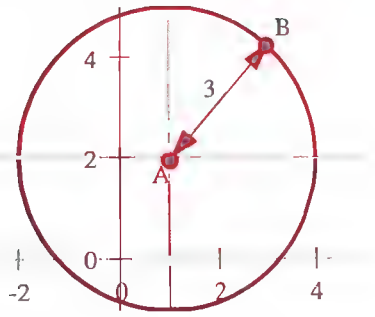
a) Obtener una ecuación de la circunferencia de centro $A = (1,2)$ y radio 3.

b) Para cada una de las ecuaciones siguientes, probar que se trata de la ecuación de una circunferencia y obtener su centro y su radio:

1) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$ 2) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0.$

Solución.

a) Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia. La condición $d(A,P) = 3$ se



expresa en coordenadas del siguiente modo:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3.$$

Al elevar cada miembro al cuadrado, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

b) Para probar que las ecuaciones dadas son las ecuaciones de circunferencias debemos probar que equivalen a la condición de distar una cantidad constante (radio) a un punto del plano (centro).

1) Intentamos reescribir la ecuación en la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$x^2+y^2-6x-2y+6=0 \Rightarrow (x-3)^2-9+(y-1)^2-1+6=0 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=4 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=2^2.$$

Así los puntos, P, del plano cuyas coordenadas verifican la ecuación anterior son aquellos que verifican $(d(B,P))^2=2^2$, siendo B(3,1). Por tanto, se trata de la circunferencia de centro B(3,1) y radio 2.

2) En este caso, $x^2+y^2+4x-2y+4=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=1$.

Así pues, los puntos, P, del plano cuyas ecuaciones verifican la ecuación dada son aquellos tales que $(d(C,P))^2=1^2$, siendo C(-2,1). Por tanto, se trata de la circunferencia de centro C(-2,1) y radio 1.

TEMA 17

Geometría analítica del espacio

Problema 1

Sea π el plano de ecuación $3x+2y-z=1$ y r la recta de ecuaciones $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$.

Estudiar si los puntos $P=(1,0,0)$, $Q=(2,-3,-4)$, $R=(0,1,1)$, $S=(0,0,-1)$ pertenecen al plano π o a la recta r.

Solución. El punto P no está en el plano pues sus coordenadas no verifican su ecuación, $3\cdot 1+2\cdot 0-0=3\neq 1$. Por otra parte P tampoco pertenece a la recta ya que sus coordenadas no cumplen las ecuaciones de dicha recta, $\begin{cases} 3\cdot 1+2\cdot 0=3\neq 0 \\ 0-0=0\neq 1 \end{cases}$.

El punto Q no pertenece al plano pues $3\cdot 2+2\cdot(-3)-(-4)=4\neq 1$ y sí pertenece a la recta pues verifica sus ecuaciones, $\begin{cases} 3\cdot 2+2\cdot(-3)=0 \\ -3-(-4)=1 \end{cases}$.

El punto R pertenece al plano pues verifica su ecuación $3\cdot 0+2\cdot 1-1=1$ y no pertenece a la recta pues no verifica sus ecuaciones $\begin{cases} 3\cdot 0+2\cdot 1=2\neq 0 \\ 1-1=0\neq 1 \end{cases}$.

Por último, S pertenece al plano pues $3\cdot 0+2\cdot 0-(-1)=1$ y a la recta puesto que $\begin{cases} 3\cdot 0+2\cdot 0=0 \\ 0-(-1)=1 \end{cases}$.

Problema 2

Hallar una ecuación implícita para cada plano dado por las siguientes condiciones:

a) Plano que pasa por los puntos $P_1 = (1,0,-1)$, $P_2 = (1,3,0)$ y $P_3 = (2,-1,3)$.

b) Plano que pasa por el punto $Q = (3,0,1)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.

Solución.

a) Sea π_1 el plano que pasa por P_1, P_2 y P_3. Un punto cualquiera $P = (x,y,z)$ pertenece a π_1 si y sólo si los vectores $\mathbf{v}_{P_1P}$, $\mathbf{v}_{P_1P_2}$ y $\mathbf{v}_{P_1P_3}$ son linealmente dependientes.

Como $\mathbf{v}_{P_1P} = (x,y,z) - (1,0,-1) = (x-1, y, z+1)$, $\mathbf{v}_{P_1P_2} = (1,3,0) - (1,0,-1) = (0,3,1)$ y $\mathbf{v}_{P_1P_3} = (2,-1,3) - (1,0,-1) = (1,-1,4)$, entonces se tiene que

$$\mathbf{v}_{P_1P},\ \mathbf{v}_{P_1P_2} \text{ y } \mathbf{v}_{P_1P_3} \text{ linealmente dependientes equivale a que } \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y & 3 & -1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{es decir, } \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y & 3 & -1 \\ z+1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (x-1)\,13 + y + (z+1)(-3) = 13x + y - 3z - 16 = 0.$$

Luego, una ecuación implícita del plano π_1 es $13x + y - 3z - 16 = 0$.

b) Sea π_2 el plano que pasa por el punto Q y es paralelo al plano $3x - 2y + 5z + 1 = 0$. Al ser π_2 paralelo al plano $3x - 2y + 5z + 1 = 0$, el plano solución tiene una ecuación del tipo:

$$3x - 2y + 5z + K = 0, \text{ donde } K \in \mathbf{R},$$

como además dicho plano debe pasar por el punto $(3,0,1)$, entonces se verifica

$$3 \cdot 3 - (2 \cdot 0) + 5 \cdot 1 + K = 0, \text{ luego } K = -14.$$

Una ecuación de π_2 es $3x - 2y + 5z - 14 = 0$.

Problema 3

Estudiar si los siguientes pares de planos son paralelos o se cortan:

a) $x = 0;\ y + z = 0$

b) $\begin{cases} x = s + t \\ y = 1 + s + t \\ z = t \end{cases};\ x - y = 0$

Solución. Si los planos se cortan las coordenadas de los puntos de intersección deben ser soluciones del sistema formado por las ecuaciones de los dos planos.

a) Comencemos así por discutir tal sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$ que es menor que el número de incógnitas. Dado que el sistema es homogéneo, (así pues, el rango de la matriz de los coeficientes coincide automáticamente con el rango de la matriz ampliada) el sistema tiene infinitas soluciones.

Conclusión: Los planos son distintos, (el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y así las ecuaciones no son proporcionales) y como tienen puntos comunes, se trata de dos planos distintos que se cortan en una recta.

b) Análogamente, vemos si los planos se cortan. Estudiamos si existen puntos cuyas coordenadas verifiquen al mismo tiempo las ecuaciones de ambos planos,

$$\begin{cases} x = s + t \\ y = 1 + s + t \\ z = t \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z de las tres primeras ecuaciones en la cuarta obtenemos:

$$s + t - (1 + s + t) = 0 \Rightarrow -1 = 0,$$

que es contradictorio. Luego, el sistema es incompatible.

Conclusión: Los dos planos no tienen ningún punto en común, luego son paralelos.

Problema 4

Demostrar que los puntos:

a) (-1,-3,7), (-2,-2,9) y (1,3,5) son los vértices de un triángulo rectángulo.

b) (0,1,-1), (3,6,7) y (8,-2,4) son los vértices de un triángulo equilátero.

c) (2,0,5), (4,4,2) y (8,12,-4) están situados sobre una recta.

d) (2,1,-3), (1,-1,0) y (1,3,0) no están situados sobre una recta.

Solución.

a) Sean $A = (-1,-3,7)$, $B = (-2,-2,9)$ y $C = (1,3,5)$, entonces

$$\mathbf{v}_{AB} = (-2+1, -2+3, 9-7) = (-1, 1, 2),$$

$$\mathbf{v}_{AC} = (1+1, 3+3, 5-7) = (2, 6, -2),$$

que no son proporcionales, por tanto, A, B y C forman un triángulo.

Además, $\mathbf{v}_{AB} \cdot \mathbf{v}_{AC} = -2 + 6 - 4 = 0$, es decir, los vectores $\mathbf{v}_{AB}$ y $\mathbf{v}_{AC}$ son ortogonales.

La recta que pasa por A y B y la recta que pasa por A y C son perpendiculares. Luego, el triángulo dado es rectángulo en A.

b) Sean $M = (0,1,-1)$, $N = (3,6,7)$ y $P = (8,-2,4)$, entonces,

$$v_{MN} = (3,5,8),\ v_{MP} = (8,-3,5) \text{ (no son proporcionales) y } v_{NP} = (5,-8,-3).$$

Además, $|v_{MN}| = |v_{MP}| = |v_{NP}| = \sqrt{9+25+64} = \sqrt{98}$.

Los tres puntos forman un triángulo que es equilátero.

c) Sean $Q(2,0,5)$, $R(4,4,2)$ y $S(8,12,-4)$, entonces,

$$v_{QR} = (2,4,-3) \text{ y } v_{QS} = (6,12,-9) \text{ (son proporcionales).}$$

Como $v_{QS} = 3 \cdot v_{QR}$, los vectores v_{QR}, v_{QS} son linealmente dependientes. Los tres puntos están situados sobre una recta cuya dirección es $\{t \cdot v_{QR} : t \in \mathbf{R}\} = \{(2t, 4t, -3t) : t \in \mathbf{R}\}$.

d) Sean $E(2,1,-3)$, $F(1,-1,0)$ y $G(1,3,0)$, entonces,

$$v_{EF} = (-1,-2,3) \text{ y } v_{EG} = (-1,2,3) \text{ (no son proporcionales).}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ el rango de la matriz $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es 2. Luego los vectores v_{EF} y v_{EG} son linealmente independientes. Luego, los puntos E, F y G no están alineados.

Problema 5

Estudiar si los pares de rectas siguientes se cortan, son paralelas, se cruzan o coinciden.

a) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$

En los casos en que las rectas se corten hallar el ángulo que forman.

Solución. Estudiemos si las rectas se cortan, es decir, si existe algún punto común de ambas. para ello, las coordenadas de un punto común debe verificar a un tiempo las ecuaciones de las dos rectas.

a) En este caso se busca la solución del sistema $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$. Pero este sistema es claramente incompatible ($0 = z = 1$ absurdo). Así pues, las rectas o son paralelas o se cruzan.

Un vector de dirección de la primera recta debe verificar $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, tomemos por ejemplo $u = (0,1,0)$ (obsérvese que $B = (0,1,0)$ y $A = (0,0,0)$ son dos puntos de la recta y que el vector que une los puntos A y B posee

coordenadas (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0)). Un vector de dirección de la segunda debe verificar $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, por ejemplo, $\mathbf{v} = (1,0,0)$.

Como los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes, pues no son proporcionales, entonces las rectas se cruzan.

b) En este caso el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, tiene solución única $x = 0, y = 0, z = 1$. Por lo tanto las rectas se cortan en el punto (0,0,1).

Veamos ahora qué ángulo forman las rectas al cortarse. Un vector de dirección de la primera recta debe verificar $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, así pues, $\mathbf{u} = (0,0,1)$, es un vector de dirección. Para la segunda recta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, por tanto, $\mathbf{v} = (1,0,0)$ es vector de dirección de la segunda recta.

El ángulo de las dos rectas viene dado por el ángulo de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, es decir, es el ángulo α cuyo coseno es:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Luego, las rectas son perpendiculares.

c) Como el sistema $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ x = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ es incompatible (1 = x = 0 absurdo), entonces las rectas o se cruzan o son paralelas.

Un vector de dirección de la primera debe verificar $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, luego, $\mathbf{u} = (0,1,0)$, es un vector de dirección. Para la segunda $\begin{cases} x = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ y $\mathbf{v} = (0,1,0)$ es vector de dirección.

Como los vectores son iguales, entonces las direcciones de las dos rectas coinciden, así pues, son rectas paralelas.

d) Estudiamos el sistema $\begin{cases} x = 1 \\ x + z = 3 \\ x + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$ cuya matriz de los coeficientes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene rango 2 (obsérvese que tiene una columna de ceros) y la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene también rango 2 (la última columna $c_4 = c_1 + 2c_3$). Luego, el sistema es compatible e indeterminado. Por tanto, las rectas coinciden.

Problema 6

Determínese los pares de números reales (a,b) para los que la recta $\frac{x}{a} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ está contenida en el plano $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -b - 2\lambda + 3\mu \end{cases}$.

Solución. Si la recta está sobre el plano, entonces cualquier vector de dirección de la recta, por ejemplo, $\mathbf{u} = (a,1,1)$, debe ser también vector de dirección del plano.

Dos vectores de dirección del plano son directamente observados en la ecuación paramétrica del plano, $\mathbf{v} = (1,0,-2)$ y $\mathbf{w} = (0,1,3)$.

Cualquier otro vector de dirección del plano es combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Para que la recta esté contenida en el plano, $\mathbf{u}$ debe ser también vector de dirección del plano, luego $\mathbf{u}$, v y $\mathbf{w}$ tienen que ser linealmente dependientes. Así pues,

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 + 2a - 3 = 0, \text{ de donde } a = 1.$$

Con esta condición no se distingue si la recta está contenida en el plano o si es paralela. Para que la recta esté contenida en el plano bastará con comprobar que un punto cualquiera de la recta, por ejemplo (0,0,-1), pertenezca al plano,

$$\begin{cases} 0 = \lambda \\ 0 = \mu \\ -1 = -b - 2\lambda + 3\mu \end{cases}, \text{ de donde } -1 = -b - 2.0 + 3.0, \text{ así } b = 1.$$

Conclusión: Si $a = 1$ y $b = 1$ la recta está contenida en el plano.

Problema 7

Se llama esfera en E_3 de centro $A \in E_3$ y radio $r > 0$ al conjunto de todos los puntos $P \in E_3$ tales que $d(A,P) = r$. Se pide:

a) Hallar una ecuación de la esfera de centro $A = (2,3,5)$ y radio 6.

b) Hallar una ecuación de la esfera que tiene el segmento que une los puntos $P_1 = (2,-2,4)$ y $P_2 = (4,8,-6)$ como diámetro.

c) Hallar una ecuación de la esfera cuyo centro es el punto $B = (4,0,2)$ y que pasa por el punto $Q = (-2,2,5)$.

d) Hallar una ecuación de la esfera cuyo centro es el punto $C = (1,1,1)$ y que es tangente al plano $\pi: 2x - 2y + z + 5 = 0$.

Solución.

a) La condición $d(A,P) = r$ es equivalente a la condición $(d(A,P))^2 = r^2$, luego,

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 6^2$$

es una ecuación para la esfera dada. Al desarrollar los cuadrados obtenemos,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 2 = 0 .$$

b) Un diámetro de una esfera es un segmento que contiene al centro y une dos puntos de la esfera P_1 y P_2. El centro de la esfera es el punto medio M del segmento que une P_1 y P_2,

$$\mathbf{v}_{OM} = \mathbf{v}_{OP_1} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{P_1P_2} = (3,3,-1) \Rightarrow M = (3,3,-1).$$

El radio de la esfera es el número, igual a la mitad de la longitud del segmento P_1P_2,

$$\frac{1}{2}d(P_1,P_2) = \frac{1}{2}\sqrt{204} = \sqrt{51}$$ (también puede calcularse como $d(P_1,M) = d(P_2,M)$).

Una vez conocido el centro y el radio de la esfera procedemos como en el apartado anterior. La ecuación para la esfera en cuestión es

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 51 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z = 32.$$

c) El radio de la esfera es la distancia que hay entre el centro y un punto de esta.

$$d(B,Q) = \sqrt{(4+2)^2 + (0-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{49} = 7 .$$

Una ecuación para nuestra esfera es

$$(x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4z = 29.$$

d) La condición de que la esfera es tangente al plano implica que el radio coincide con la distancia del centro al plano.

$$r = d(C, \pi) = \frac{2-2+1+5}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2.$$

En este caso la ecuación de la esfera es

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 1.$$

Problema 8

Sean $P_1 = (5,2,2)$ y $P_2 = (8,5,4)$. Se pide:

a) Hallar una ecuación del conjunto de puntos $P \in E_3$ tales que $d(P_1,P) = d(P_2,P)$.

b) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto medio del segmento que une P_1 con P_2 y es perpendicular a la recta que pasa por P_1 y P_2. Comparar el resultado con a).

Solución.

a) La condición $d(P_1,P) = d(P_2,P)$ es equivalente a la condición $(d(P_1,P))^2 = (d(P_2,P))^2$,

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (x-8)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2,$$

al desarrollar los cuadrados,

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + z^2 - 4z + 33 = x^2 - 16x + y^2 - 10y + z^2 - 8z + 105,$$

al pasar todos los términos al primer miembro y simplificar obtenemos la ecuación,

$$3x + 3y + 2z - 36 = 0 \text{ (esta ecuación representa a un plano).}$$

b) El punto medio del segmento que une P_1 con P_2 es $M = (\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, 3)$, y el vector $\mathbf{v}_{P_1P_2} = (3, 3, 2)$ es un vector ortogonal a los vectores del plano que buscamos.

La ecuación de este plano es entonces:

$$3(x - \frac{13}{2}) + 3(y - \frac{7}{2}) + 2(z-3) = 0 \Rightarrow 3x + 3y + 2z - 36 = 0.$$

Conclusión: Como se observa, este último plano coincide con el lugar geométrico del apartado (a). En general, se puede probar que dados dos puntos distintos $P_1 \neq P_2$, el lugar geométrico de los puntos $P \in E_3$ tales que $d(P_1, P) = d(P_2, P)$, es decir, que equidistan de los puntos dados P_1 y P_2, es un plano, que pasa por el punto medio del segmento que une P_1 y P_2 y es perpendicular a la recta que contiene a P_1 y P_2. Este plano recibe el nombre de mediador de los puntos P_1 y P_2.

Problema 9

a) Demostrar que la recta r que pasa por los puntos $P_1 = (2,3,0)$ y $P_2 = (2,-9,5)$ y la recta

s que pasa por los puntos $P_3 = (-8,-3,-10)$ y $P_4 = (-8,9,-15)$ son paralelas.

b) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $Q_1 = (1,-3,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $Q_2 = (0,0,3)$ y $Q_3 = (1,-3,2)$.

c) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1' = (2,1,-1)$ y $P_2' = (1,1,2)$ y que es perpendicular al plano de ecuación $7x+4y-4z+30 = 0$.

d) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $Q_1' = (3,-1,2)$ y que es perpendicular a cada uno de los planos $\pi_1 : 2x-3y+z = 4$ y $\pi_2 : x+2y+3z = 5$.

Solución.

a) Un vector de dirección de la recta r es $\mathbf{v}_{P_1P_2} = (0,-12,5)$, y un vector de dirección de la recta s es $\mathbf{v}_{P_3P_4} = (0,12,-5)$. Como $\mathbf{v}_{P_3P_4} = -\mathbf{v}_{P_1P_2}$, se verifica que los vectores $\mathbf{v}_{P_1P_2}$, $\mathbf{v}_{P_3P_4}$ son linealmente dependientes. Por tanto, las rectas r y s son paralelas, puesto que sus direcciones coinciden.

b) Un vector de dirección de la recta que pasa por Q_2 y Q_3 es $\mathbf{v}_{Q_2Q_3} = (1,-3,-1)$. Este es, por tanto, un vector característico del plano, (vector perpendicular al plano) que nos piden. Como este plano pasa por el punto Q_1, entonces una ecuación de dicho plano es,

$$(x-1)-3(y+3)-(z-2) = 0 \Rightarrow x-3y-z-8 = 0.$$

c) Un vector de dirección del plano solicitado es el vector $\mathbf{v}_{P_1'P_2'} = (-1,0,3)$. Como este plano es perpendicular al plano $\pi : 7x+4y-4z+30 = 0$ y el vector $\mathbf{u} = (7,4,-4)$ es un vector característico de π (un vector perpendicular a π), entonces $\mathbf{u}$ también es otro vector de dirección del plano.

Como $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & -4 \end{bmatrix} = 2$, entonces los vectores $\mathbf{v}_{P_1'P_2'}$, $\mathbf{u}$ son linealmente independientes. Un vector ortogonal a ambos es el vector

$$\mathbf{v}_{P_1'P_2'} \times \mathbf{u} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-12,17,-4),$$

que es, a su vez, un vector característico del plano solicitado, luego éste es

$$-12(x-2)+17(y-1)-4(z+1) = 0 \Rightarrow -12x+17y-4z+3 = 0.$$

d) Sea π el plano solicitado. Como π es perpendicular a π_1, el vector $\mathbf{u}_1 = (2,-3,1)$, característico de π_1, es vector de dirección de π, y como π es perpendicular a π_2, el vector $\mathbf{u}_2 = (1,2,3)$, característico de π_2, es vector de dirección de π. Además, los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes, ya que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2$.

Un vector característico de π es el vector

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-11,-5,7).$$

Por consiguiente, una ecuación de π es

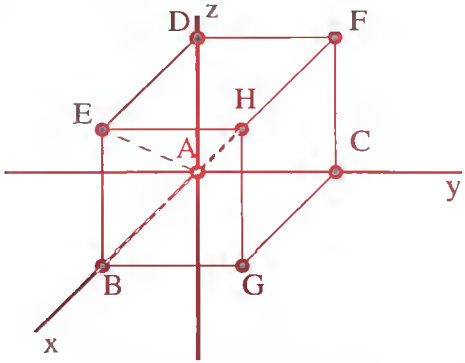
$$-11(x-3)-5(y+1)+7(z-2)=0 \Rightarrow -11x-5y+7z+14=0.$$

Problema 10

Por un vértice de un cubo se trazan una arista, una diagonal de una cara y una diagonal del cubo. Se pide calcular el coseno del ángulo que forma la diagonal del cubo con:

a) La arista. b) La diagonal de la cara.

Solución. Sea a la longitud de la arista del cubo. Situemos el cubo de manera que sus vértices sean los puntos A = (0,0,0), B = (a,0,0), C = (0,a,0), D = (0,0,a), E = (a,0,a), F = (0,a,a), G = (a,a,0) y H = (a,a,a).



a) Una diagonal del cubo es la recta que pasa por los puntos A = (0,0,0) y H = (a,a,a). Por tanto, un vector en la dirección de esta diagonal es el vector $\mathbf{v}_{AH}$ = (a,a,a). Podemos tomar como arista del cubo una que contenga al vértice A, como es la que pasa por los vértices A = (0,0,0) y B = (a,0,0). Por consiguiente, un vector en la dirección de esta arista es el vector $\mathbf{v}_{AB}$ = (a,0,0). Se trata de calcular

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{v}_{AH}\cdot\mathbf{v}_{AB}|}{|\mathbf{v}_{AH}||\mathbf{v}_{AB}|} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Consideremos ahora el vértice A = (0,0,0), la cara ABED y su diagonal AE, con E = (a,0,a). Por otro lado, consideremos la diagonal del cubo que pasa por los puntos A y H, y en su dirección el vector $\mathbf{v}_{AH}$ = (a,a,a), como en el apartado (a). Esta vez se trata de calcular

$$\cos\beta = \frac{|\mathbf{v}_{AE}\cdot\mathbf{v}_{AH}|}{|\mathbf{v}_{AE}||\mathbf{v}_{AH}|} = \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2}\sqrt{3a^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

TEMA 18

Sucesiones

Problema 1

Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n+1}{n!}$, hallar a_{n-1} y a_{n+1}, y calcular $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

Solución. En la expresión de a_n escribimos n-1 y n+1 respectivamente: (para ello, sustituimos n-1 o n+1 en el lugar que ocupa la n en el término general)

$$a_{n-1} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}.$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{n+1}{n!}}{\dfrac{n}{(n-1)!}} = \frac{(n+1)\,(n-1)!}{n \cdot n!} = \frac{(n+1)\,(n-1)!}{n \cdot n \cdot (n-1)!} = \frac{n+1}{n^2}$$

Problema 2

Hallar los términos tercero, cuarto y quinto de la sucesión definida por la ley de recurrencia:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ siendo } a_1 = 2 \text{ y } a_2 = 4 .$$

Solución. Se sustituye en la expresión que define la ley de recurrencia la n por 3:

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 \cdot 4 + 2 = 10 .$$

Análogamente para $n = 4$ y $n = 5$:

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 \cdot 10 + 4 = 24 \quad \text{y} \quad a_5 = 2a_4 + a_3 = 2 \cdot 24 + 10 = 58 .$$

Problema 3

Hallar los términos a_1, a_2 y a_3 de una sucesión sabiendo que $a_4 = 6, a_5 = 3, a_6 = 4$ y que a partir del cuarto término se verifica que $a_n = \frac{1}{6}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-3}$.

Solución. Aplicamos la fórmula general al término a_6, $a_6 = \frac{1}{6}a_5 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{2}a_3$,

y sustituimos a_4, a_5, a_6 por sus valores, $4 = \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 6 + \frac{1}{2}a_3$.

Al despejar a_3 se obtiene $a_3 = 2\left(4 - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{2(8-1-4)}{2} = 3$.

Análogamente para el término a_5, $a_5 = \frac{1}{6}a_4 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_2$, de donde

$$3 = \frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{2}a_2, \text{ luego } a_2 = 2(3-1-1) = 2.$$

Por último para a_4 se tiene:

$$a_4 = \frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 \;;\; 6 = \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2}a_1, \text{ luego } a_1 = \frac{29}{3}.$$

Problema 4

Comprobar que la sucesión de término general $a_n = \frac{2^n}{n!}$ es monótona decreciente.

Se tiene que comprobar que se verifica que $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \ge 1$. Como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n\cdot (n+1)!} = \frac{2\cdot 2^n\cdot n!}{2^n\cdot (n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1}$$

$\left(\frac{2}{n+1} \le 1 \text{ para todo } n \ge 1\right)$, resulta que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \le 1$ para todo $n \ge 1$ y, por tanto, $a_{n+1} \le a_n$ para todo $n \ge 1$.

Problema 5

Determinar cuáles de las siguientes sucesiones son positivas:

a) $(2n+1)$ b) (n^4+n^2+1)

c) (n^2-4n+1) d) $(-3n^2+n^3)$

Solución. Una sucesión es positiva si todos sus términos son positivos (es decir, son números mayores que cero aunque alguno sea cero).

a) Dado cualquier número natural n resulta que $2n+1>1>0$. Luego, la sucesión es positiva.

b) Dado cualquier número natural n se tiene que $n^4>0$ y $n^2>0$, luego $n^4+n^2+1>0$. Así pues, la sucesión dada es positiva.

c) Para poder afirmar que la sucesión dada es positiva se tiene que verificar que $n^2-4n+1\geq 0$ para cualquier número natural n. Sin embargo, los términos primero, segundo y tercero son negativos:

$$a_1=-2\ ,\ a_2=-3\ ,\ a_3=-2\ ,$$

entonces se tiene que esta sucesión no es positiva.

d) Igual que en el apartado anterior, se tiene que los términos $a_1=-2$ y $a_2=-4$ son números negativos, por tanto, en este caso la sucesión no es positiva.

Problema 6

Determinar las sucesiones que son acotadas superiormente, acotadas inferiormente o acotadas:

a) (n^2+1) b) $((-1)^n)$

c) $((-1)^n n)$ d) $(\frac{5}{n})$

Solución.

a) La sucesión dada es: $2, 5, 10, 17, \ldots, n^2+1, \ldots$

Esta sucesión está acotada inferiormente pues 2 es una cota inferior; para todo $n\in \mathbf{N}$

$$\text{si } 1\leq n \Rightarrow 1^2\leq n^2 \Rightarrow 1+1\leq n^2+1 \Rightarrow 2\leq n^2+1$$

Veamos que no está acotada superiormente. (Para comprobar esto utilizamos un razonamiento denominado reducción al absurdo. Este consiste en suponer lo contrario de lo que se desea demostrar y comprobar que se produce una contradicción). En este caso, supongamos que existe un número real M tal que

$$n^2+1\leq M \text{ para todo } n\in \mathbf{N}.$$

Sea α el primer número natural mayor que M, entonces $M<\alpha\leq \alpha^2+1$ y como α^2+1 es el valor del término α de la sucesión (el correspondiente a $n=\alpha$) que es mayor que M, entonces esto es absurdo.

Conclusión: Esta sucesión no es acotada aunque si está acotada inferiormente.

b) La sucesión dada es: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Esta sucesión es acotada pues -2 es una cota inferior y 2 es una cota superior.

c) La sucesión dada es: $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

Los términos impares forman la subsucesión (i_n) siguiente: $-1, -3, -5, \ldots$

que no está acotada inferiormente. Si existiera un número real m tal que $m \le i_k$ para todo $k \in \mathbf{N}$, bastaría tomar α el menor número natural impar mayor que $-m$ y se tendría que $i_\alpha = -\alpha < m$, lo cual es un absurdo.

La subsucesión (p_n) formada por los términos pares es: $2, 4, 6, \ldots$

que de manera análoga se comprueba que no está acotada superiormente.

Conclusión: La sucesión $((-1)^n n)$ no es acotada, ni inferior ni superiormente.

d) La sucesión dada es: $\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{5}{10}, \frac{5}{11}, \frac{5}{12}, \ldots$

Una cota superior de esta sucesión es 5 ya que $\left(\text{si } n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < 1\right)$

$$5 = \frac{5}{1} \ge \frac{5}{n} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Una cota inferior es 0 ya que $\left(\text{si } n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0\right)$

$$\frac{5}{n} \ge 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$

Luego la sucesión es acotada (superiormente e inferiormente).

Problema 7

Dada la sucesión

$$a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ ,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ ,\ a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ \ldots$$

escribir la expresión del término general y probar que está acotada superiormente.

Solución. En esta sucesión no queda definido su término general mediante una expresión en función de n, sino que se define de forma recursiva. Para ello, es necesario conocer los términos anteriores al término n-ésimo. (Podría darse como expresión de formación la siguiente $a_n > 0$ y $a_n^2 - a_{n-1} = 2$).

$$a_1 = \sqrt{2}\,.$$

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1}\,.$$

$$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+a_2}\,.$$

$$a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2+a_3}\,.$$

...

$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Veamos que esta sucesión está acotada superiormente:

$a_1 = \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$.

$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})} < \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1}$

$= \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 1 + \sqrt{2}$ (puesto que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$).

$a_3 = \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})} < \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 1 + \sqrt{2}$.

...

$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})} < \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 1 + \sqrt{2}$

Por tanto $1 + \sqrt{2}$ es una cota superior de la sucesión dada.

Problema 8

Estudiar la acotación de las sucesiones de término general

a) $a_n = 2n$ b) $b_n = -4n + 3$

c) $c_n = \dfrac{3n - 5}{n + 1}$ d) $d_n = (-1)^n n^2$

Solución.

a) La sucesión dada es: $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots$

Evidentemente (como $n > 1$) $2n \geq 2 \cdot 1 = 2$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y, por tanto, 2 es una cota inferior de la sucesión. La sucesión está acotada inferiormente.

Veamos, por reducción al absurdo, que la sucesión no está acotada superiormente. Supuesto que la sucesión está acotada superiormente, entonces existe un número real M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbf{N}$

Sea h el menor número natural estrictamente mayor que $\dfrac{M}{2}$, entonces el término $a_h = 2 \cdot h > 2 \cdot \dfrac{M}{2} = M$, lo que es una contradicción.

Conclusión: La sucesión está acotada sólo inferiormente.

b) La sucesión dada es: $-1, -5, -9, -13, \ldots, -4n + 3, \ldots$

Esta sucesión está acotada superiormente. En efecto, si $n \geq 1$, entonces $-4n \leq -4$, (al multiplicar o dividir los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido) por tanto, $-4n + 3 \leq -4 + 3 = -1$.

Luego $-4n+3 \le -1$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y -1 es una cota superior de la sucesión.

Por otra parte, si se supone que la sucesión está acotada inferiormente, entonces existe un número real M tal que $M \le -4n+3$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Si n_0 es el menor número natural estrictamente mayor que $\frac{-M+3}{4}$, resulta que

$$M+4n_0 > M+4\left(\frac{-M+3}{4}\right) = M-M+3 = 3$$

y, por tanto, $M > -4n_0+3$ lo que es una contradicción con el hecho de ser M una cota inferior de la sucesión.

Conclusión: La sucesión sólo está acotada superiormente.

c) La sucesión dada es: $\frac{-2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{7}{5}, \frac{10}{6}, \ldots\ldots, \frac{3n-5}{n+1}, \ldots$

Como $n > 1$, entonces $3n-5 \ge -5$ y resulta que $\frac{3n-5}{n+1} \ge \frac{-5}{n+1}$. Además, como $\frac{5}{n+1} < 5$ entonces $-\frac{5}{n+1} > -5$ y, por tanto, $\frac{3n-5}{n+1} \ge -5$.

Luego -5 es una cota inferior de la sucesión. La sucesión está acotada inferiormente.

Por otra parte, 3 es una cota superior de (c_n) ya que

$$\frac{3n-5}{n+1} \le \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3(n+1)}{n+1} = 3 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Conclusión: La sucesión está acotada.

d) La sucesión dada es: $-1, 4, -9, 16, -25, \ldots\ (-1)^n n^2, \ldots$

Veamos (por reducción al absurdo) que la sucesión (d_n) no está acotada ni superiormente ni inferiormente.

Supuesto que M es cota superior de (d_n), como $d_n \le M$ para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene que

$$M \ge d_2 = (-1)^2 2^2 = 4 > 0.$$

Si n_0 es el menor número natural tal que $n_0 > \frac{\sqrt{M}}{2}$, entonces $n_0^2 > \frac{M}{4}$ y

$$d_{2n_0} = (-1)^{2n_0}(2n_0)^2 = ((-1)^2)^{n_0} 4n_0^2 = 4n_0^2 > 4\frac{M}{4} = M.$$

Luego $d_{2n_0} > M$ y, por tanto, M no es una cota superior, lo que es una contradicción. Así pues, la sucesión no es acotada superiormente.

Por otra parte, supuesto que L es una cota inferior de (d_n), entonces $L < (-1)^n n^2$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y, en particular $L < (-1)^1 \cdot 1 = -1 < 0$, es decir L es un número negativo.

Sea n_0 el menor número natural tal que $n_0 > \frac{\sqrt{-L}-1}{2}$, entonces $2n_0+1 > \sqrt{-L}$ y

$(2n_0+1)^2 > -L$. Por tanto $-(2n_0+1)^2 < L$ y

$$d_{2n_0+1} = (-1)^{2n_0+1}(2n_0+1)^2 = ((-1)^{2n_0}(-1)(2n_0+1)^2) = -(2n_0+1)^2 < L,$$

lo que es una contradicción con que L fuese una cota inferior de la sucesión.
Conclusión: La sucesión no es acotada ni superiormente ni inferiormente.

Problema 9

Dado $k > 0$ se define la sucesión de término general $a_n = \sqrt{k + a_{n-1}}$ tal que $a_1 = \sqrt{k}$. Escribir los cinco primeros términos de la sucesión y demostrar que es monótona creciente.
Solución. Calculamos los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = \sqrt{k}.$$

$$a_2 = \sqrt{k + a_1} = \sqrt{k + \sqrt{k}}.$$

$$a_3 = \sqrt{k + a_2} = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}.$$

$$a_4 = \sqrt{k + a_3} = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}}.$$

$$a_5 = \sqrt{k + a_4} = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}}}.$$

A continuación, veamos que esta sucesión es monótona creciente , es decir, veamos que $a_n - a_{n-1} > 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Lo haremos por el método de inducción.

(Sabemos que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, luego $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$).

$$a_2 - a_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2 + a_1} = \frac{(k + \sqrt{k}) - k}{a_2 + a_1} = \frac{\sqrt{k}}{a_2 + a_1} > 0 \text{ , (pues numerador y denominador son ambos positivos)}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{a_3^2 - a_2^2}{a_3 + a_2} = \frac{k + a_2 - k - a_1}{a_3 + a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 + a_2} > 0 \text{ ,(pues numerador y denominador son ambos positivos)}$$

Supongamos que la desigualdad es cierta para el término p, es decir, supongamos que es cierto que $a_p - a_{p-1} > 0$ y demostremos que se cumple para el término $p+1$.

$$a_{p+1} - a_p = \frac{a_{p+1}^2 - a_p^2}{a_{p+1} + a_p} = \frac{k + a_p - k - a_{p-1}}{a_{p+1} + a_p} = \frac{a_p - a_{p-1}}{a_{p+1} + a_p} > 0,$$

(pues numerador y denominador son ambos positivos)

Por tanto, $a_n - a_{n-1} > 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Luego, $a_n > a_{n-1}$ y la sucesión es creciente.

Problema 10

Estudiar la convergencia de la sucesión $((-1)^n)$.

Solución. La sucesión dada es: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Veamos (por reducción al absurdo) que la sucesión no es convergente. Supongamos que $a \in \mathbf{R}$ es el límite de esta sucesión, entonces para

$$\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que } |a - (-1)^n| < \frac{1}{2} \text{ para todo } n \geq n_0 .$$

Por tanto, como $2n_0 \geq n_0$ se tiene que

$$|a - (-1)^{2n_0}| = |a - 1| < \frac{1}{2} \text{ , luego, } -\frac{1}{2} < a - 1 < \frac{1}{2} ,$$

de donde resulta que (sumando 1 a todos los términos de las desigualdades)

$$-\frac{1}{2} + 1 < a - 1 + 1 < \frac{1}{2} + 1 \text{ , es decir } \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2} . \qquad (10.1)$$

Por otra parte, como $2n_0 + 1 \geq n_0$ resulta que

$$|a - (-1)^{2n_0+1}| = |a + 1| < \frac{1}{2} \text{ y, por tanto, } -\frac{1}{2} < a + 1 < \frac{1}{2} ,$$

de donde resulta que (sumando -1 a todos los términos de las desigualdades)

$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2} . \qquad (10.2)$$

De (10.1) y (10.2) se deduce que $\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{2}$ lo cual es un absurdo.

Problema 11

Demostrar que una sucesión sólo puede poseer un límite.

Solución. Supongamos que tiene dos límites.

Sea $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = a'$ tales que $a \neq a'$.

Que $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ quiere decir que para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|a_n - a| < \varepsilon_1$.

Que $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ quiere decir que para cada $\varepsilon_2 > 0$ existe $n'_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n'_0$ se verifica $|a_n - a'| < \varepsilon_2$.

Si se toma $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{|a-a'|}{2}$, entonces

$$2\varepsilon = |a-a'| = |a-a_n+a_n-a'| \leq |a-a_n| + |a_n-a'|$$
$$= |a_n-a| + |a_n-a'| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon .$$

Luego se produce una contradicción, $2\varepsilon < 2\varepsilon$, ésta se produce por suponer la existencia de dos límites.

Problema 12

Aplicar la definición de límite de una sucesión para demostrar que son convergentes las siguientes sucesiones:

a) $(a_n) = \left(\dfrac{n-1}{2n}\right) \to \dfrac{1}{2}$ b) $(b_n) = \left(\dfrac{3n+2}{n-1}\right) \to 3$

Solución.

a) Veamos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. En efecto, dado cada $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un número natural n_0 tal que se verifique que $\left|a_n - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Es decir,

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2-2n}{4n}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon ,$$

y esto se verifica para todo $n \geq \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Así pues, basta considerar n_0 como la parte entera del número $\dfrac{1}{2\varepsilon}$.

b) Veamos que el límite de esta sucesión es 3. En efecto, dado cada $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un n_0 tal que $|a_n - 3| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Es decir,

$$|a_n - 3| = \left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n+3}{n-1}\right| = \left|\frac{5}{n-1}\right| = \frac{5}{n-1} < \varepsilon ,$$

y esto se verifica para todo $n \geq \dfrac{5}{\varepsilon} + 1$. Así pues, basta considerar n_0 como un número natural mayor que el número $\dfrac{5}{\varepsilon} + 1$.

Problema 13

Sea (a_n) una progresión aritmética de razón 4 y cuyo primer término, a_1, es 3. Calcular a_{24} y la suma de los 20 primeros términos.

Solución. Por la definición de sucesión aritmética se tiene que

$$a_2 = a_1 + r.$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r.$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r.$$

....

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

En particular, $a_{24} = 3 + 23 \cdot 4 = 95$ y $a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$.

La suma de los 20 primeros términos es $S_{20} = \dfrac{20\,(a_1 + a_{20})}{2} = \dfrac{20\,(3+79)}{2} = 820.$

Problema 14

¿Que lugar k ocupará en una progresión geométrica un término que vale 28672, si dicha progresión comienza en 7 y la razón es 2 ? Calcular la suma de los 13 primeros términos.

Solución. Por la definición de sucesión geométrica se tiene que:

$$a_2 = a_1 \cdot q.$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2.$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3.$$

....

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

$$28672 = 7 \cdot 2^{k-1} \Rightarrow 2^{k-1} = \frac{28672}{7} \Rightarrow 2^{k-1} = 4096 \Rightarrow 2^{k-1} = 2^{12} \Rightarrow k = 13.$$

Por tanto, el término decimotercero vale 28672.

Calculemos la suma de los trece primeros términos:

$$S_{13} = \frac{a_{13} \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{28672 \cdot 2 - 7}{2-1} = 57337.$$

TEMA 19

Cálculo de límites de sucesiones

Problema 1

Calcular los siguientes límites de sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3-3n+1}{n^2+2}$ b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n^2+1}{-n^2+2n}$

c) $\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{2n+1})$ d) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Solución. Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites en los límites a) y b) (ocurre que si sustituimos n por ∞), aparece la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ que se resuelve, en cada uno de los casos, de la siguiente manera:

a) Al ser el término general una fracción polinómica con el numerador un polinomio de grado 3 y el denominador otro polinomio de grado 2, dividimos numerador y denominador por n^3 (la mayor potencia de n):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-3n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^3}{n^3}-\dfrac{3n}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{n^2}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^3}} = +\infty.$$

b) Análogamente, como el grado del numerador es 4 y el del denominador es 2, dividimos numerador y denominador por n^4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+1}{-n^2+2n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n^4+n^2+1}{n^2-2n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+1}{n^2-2n} =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{n^2}{n^4}-\frac{2n}{n^4}} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = -\infty .$$

Con los límites c) y d) ocurre que (si sustituimos n por ∞) nos aparece la indeterminación $\infty - \infty$ que se resuelve multiplicando y dividiendo, en estos casos, por el conjugado de la expresión que produce dicha indeterminación.

$$\text{c)} \lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{2n+1})(n+\sqrt{2n+1})}{n+\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(2n+1)}{n+\sqrt{2n+1}}$$

(si sustituimos n por ∞, aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se resuelve, dividiendo numerador y denominador por n^2).

$$\lim_{n\to\infty} (n-\sqrt{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\sqrt{\frac{2n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}} = \infty .$$

$$\text{d)} \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\infty} = 0 .$$

Problema 2

Calcular el límite de las sucesiones de término general:

$$\text{a) } a_n = \frac{2n^4+3n^2+5n+2}{5n^4+2n^3-4n+5} \quad \text{b) } b_n = \frac{-5n^3+2n-4}{4n^2+5n+2} \quad \text{c) } c_n = \frac{3n^5+4n^2+5}{n^6-3n+2}$$

$$\text{d) } d_n = \frac{\sqrt{5n^2+4n-3}}{3n-1} \quad \text{e) } e_n = \frac{3n^2+4n-1}{\sqrt[3]{2n^4-n+5}} \quad \text{f) } f_n = \frac{4n^2-1}{\sqrt[3]{3n^7-1}}$$

Solución.

a) Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites de sucesiones (si sustituimos n por ∞), aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ y al ser el término general un cociente de polinomios (el grado del numerador y el grado del denominador es 4), dividimos numerador y denominador por n^4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^2+5n+2}{5n^4+2n^3-4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^4}{n^4}+\frac{3n^2}{n^4}+\frac{5n}{n^4}+\frac{2}{n^4}}{\frac{5n^4}{n^4}+\frac{2n^3}{n^4}-\frac{4n}{n^4}+\frac{5}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{5+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^3}+\frac{5}{n^4}}=\frac{2}{5}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^3+2n-4}{4n^2+5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5n^3}{n^3}+\frac{2n}{n^3}-\frac{4}{n^3}}{\frac{4n^2}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}=-\infty.$$

c) $$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+4n^2+5}{n^6-3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^5}{n^6}+\frac{4n^2}{n^6}+\frac{5}{n^6}}{\frac{n^6}{n^6}-\frac{3n}{n^6}+\frac{2}{n^6}}=\frac{0}{1}=0.$$

d) En este caso aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ pero el término general no es un cociente de polinomios, sin embargo podemos utilizar combinadamente las propiedades de los límites para aplicar las igualdades

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{P(x)}{(Q(x))^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{P(x)}{(Q(x))^2}},$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2+4n-3}}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{5n^2+4n-3}}{n}}{\frac{3n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}-\frac{3}{n^2}}}{\frac{3n}{n}-\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

e) Se procede de forma análoga al apartado d),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-1}{\sqrt[3]{2n^4-n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+4n-1}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{2n^4-n+5}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{2n^4}{n^6}-\frac{n}{n^6}+\frac{5}{n^6}}}=\infty.$$

f) $$\lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{\sqrt[3]{3n^7-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{3n^7}{n^6}-\frac{1}{n^6}}}=\frac{4}{\infty}=0.$$

Problema 3

Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

a) $(a_n) = \left(\dfrac{2n}{\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+4}+\sqrt{4n^2+6}}\right)$ b) $(b_n) = \left(\dfrac{2+\dfrac{2n}{1-n}}{\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{n-1}{n+1}}\right)$.

c) $(c_n) = (\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4})$.

Solución.

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+4}+\sqrt{4n^2+6}} = \text{(se produce la indeterminación } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n}{n}}{\sqrt{4\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{4\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}}+\sqrt{4\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{6}{n^2}}} = \frac{2}{2+2+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

b) Operamos y simplificamos la expresión dada:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\dfrac{2n}{1-n}}{\dfrac{n+1}{n-1}-\dfrac{n-1}{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{2(1-n)+2n}{1-n}}{\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n-1)(n+1)}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-(2-2n+2n)(n+1)}{(n+1)^2-(n-1)^2}\right) = -\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{4n} = -\frac{1}{2}.$$

c) En este caso, si sustituimos n por ∞ en la expresión, aparece la indeterminación $\infty-\infty$, (que se resuelve multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+4}$).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4})\cdot(\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+4})}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-2n)-(n^2+4)}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n-4}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+4}} = \text{(se produce } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{2n}{n}-\dfrac{4}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{2n}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}}} = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

Problema 4

Calcular el límite de las sucesiones de término general :

a) $a_n = (n^3+2n)^{n-2}$ b) $b_n = (n^3+2n)^{-n+2}$

c) $c_n = \left(\dfrac{2n^2+n-3}{6n^2-4}\right)^{2n}$ d) $d_n = \left(\dfrac{6n^2-4}{2n^2+n-3}\right)^{2n}$

Solución. Se aplican las propiedades de los límites directamente puesto que no se produce indeterminación alguna.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n^3+2n)^{n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^3+2n)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-2)} = \infty^{\infty} = \infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n^3+2n)^{-n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^3+2n)^{-(n-2)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^3+2n)^{n-2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-2)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n-3}{6n^2-4}\right)^{2n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\infty} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = 0$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2-4}{2n^2+n-3}\right)^{2n} = 3^{\infty} = \infty$.

Problema 5

Calcular el límite de las sucesiones de término general:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{2n^2+1}$ b) $b_n = \left(\dfrac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{-2n^2+1}$

c) $c_n = \left(\dfrac{n^3-2n+1}{2n^3+n}\right)^{2n^2+1}$ d) $d_n = \left(\dfrac{2n^3-2n+1}{n^3+n}\right)^{2n^2+1}$

e) $e_n = \left(\dfrac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{2n^2+1}$ f) $f_n = \left(\dfrac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{-2n^2+1}$

Solución. Se aplican las propiedades de los límites directamente puesto que no se produce

indeterminación alguna.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)} = \infty^{\infty} = \infty.$

b) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{-2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{2n^2-1}} =$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2-1)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

c) $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^3+n}\right)^{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+1}{2n^3+n}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-2n+1}{n^3+n}\right)^{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-2n+1}{n^3+n}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)} = 2^{\infty} = \infty$

e) $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)} = 0^{\infty} = 0$

f) $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{-2n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{2n^2-1}} =$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{n^3-2n+1}\right)^{\lim_{n\to\infty}(2n^2-1)}} = \infty.$$

Problema 6

Calcular el límite de las sucesiones:

a) $(a_n) = \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}\right)$

b) $(b_n) = \left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2-2}}{7n-1+\sqrt{9n^2+2}}\right)$ c) $(c_n) = \left(\dfrac{\sqrt{4n^4-3}}{n\sqrt{n^2+2}}\right)$

Solución.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{4}{n}}} = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$. (tipo $\frac{\infty}{\infty}$)

b) En este límite aparece la indeterminación del tipo $\infty-\infty$. En este caso dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de n, n pues n^2 está dentro de una raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{4n^2-2}}{7n-1+\sqrt{9n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}}{\frac{7n-1}{n}+\frac{\sqrt{9n^2+2}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}-\sqrt{\frac{4n^2-2}{n^2}}}{\frac{7n-1}{n}+\sqrt{\frac{9n^2+2}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}}{7-\frac{1}{n}+\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}} = \frac{1-\sqrt{4}}{7+\sqrt{9}} = -\frac{1}{10}.$$

c) En este límite se presenta la indeterminación tipo $\frac{\infty}{\infty}$, y dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de n, n^2 pues n^4 está dentro de una raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^4-3}}{n\cdot\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4n^4-3}}{n^2}}{\frac{n}{n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+2}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4n^4}{n^4}-\frac{3}{n^4}}}{\frac{n}{n}\cdot\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{3}{n^4}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 2 \quad .$$

Problema 7

Calcular el límite de las sucesiones de término general:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-8}}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-8}}$ b) $b_n = \sqrt{n^4-6n^2+9}-2n^2$

c) $c_n = \dfrac{n^2-4}{n+2} - \dfrac{n^2-2n-3}{n+1}$ d) $d_n = \sqrt{n^2+6n} - \sqrt{n^2+2n-1}$

Solución.

a) En este caso aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-8}}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-8}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2-8}}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2-8}}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

b) En este caso aparece la indeterminación $\infty - \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4-6n^2+9}-2n^2) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{(n^2-3)^2}-2n^2) = \lim_{n\to\infty} (-n^2-3) = -\infty.$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-4}{n+2} - \frac{n^2-2n-3}{n+1}\right) \text{ (tipo } \tfrac{\infty}{\infty}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-2)(n+2)}{n+2} - \frac{(n+1)(n-3)}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} ((n-2)-(n-3)) = 1.$$

d) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+6n}-\sqrt{n^2+2n-1}) = \text{ (tipo } \infty-\infty)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+6n}-\sqrt{n^2+2n-1})(\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1})}{\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+6n)-(n^2+2n-1)}{\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+6n}+\sqrt{n^2+2n-1}} = 2.$$

Problema 8

Calcular el límite de las sucesiones de término general:

a) $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n}$ b) $b_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+5n}\right)^{2n-1}$

c) $c_n = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}}$ d) $d_n = \left(\frac{2n^2-n+5}{2n^2+3n+2}\right)^{\frac{2n^3+3n}{n^2+2}}$

Solución. Son límites del tipo $a_n^{b_n}$ donde la base a_n tiende a 1 y el exponente b_n tiende a

∞, en los que aparece la indeterminación 1^{∞} que se resuelven recordando la definición del número e.

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3\cdot 5} = e^{15}.$$

En los siguientes casos, primeramente sumamos y restamos 1, para ir obteniendo una expresión que permita aplicar la definición del número e.

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+5n}\right)^{2n-1} \overset{(\text{indet } 1^{\infty})}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2-2n+1}{n^2+5n}-1\right)^{2n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2-2n+1-n^2-5n}{n^2+5n}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1-7n}{n^2+5n}\right)^{2n-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right)^{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right]^{\frac{1-7n}{n^2+5n}\cdot(2n-1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right)^{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right]^{\frac{-14n^2+9n-1}{n^2+5n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right)^{\frac{n^2+5n}{1-7n}}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{-14n^2+9n-1}{n^2+5n}}$$

$$= e^{-14}.$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} \overset{(\text{indet } 1^{\infty})}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2+2n+1}{n^2}-1\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{n^2+1}{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{n^2+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{n^2}{2n+1}}\right)^{\frac{2n^3+n^2+2n+1}{n^3-n^2}} =$$

$$= e^2.$$

$$\text{d) } \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+5}{2n^2+3n+2}\right)^{\frac{2n^3+3n}{n^2+2}} \quad (\text{indet } 1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2-n+5}{2n^2+3n+2}-1\right)^{\frac{2n^3+3n}{n^2+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2-n+5-2n^2-3n-2}{2n^2+3n+2}\right)^{\frac{2n^3+3n}{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4n+3}{2n^2+3n+2}\right)^{\frac{2n^3+3n}{n^2+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+3n+2}{-4n+3}}\right)^{\frac{2n^2+3n+2}{-4n+3}\cdot\frac{-4n+3}{2n^2+3n+2}\cdot\frac{2n^3+3n}{n^2+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+3n+2}{-4n+3}}\right)^{\frac{2n^2+3n+2}{-4n+3}}\right]^{\frac{-8n^4+6n^3-12n^2+9n}{2n^4+3n^3+6n^2+6n+4}} = e^{-4}$$

Problema 9

Calcular el límite de las sucesiones:

a) $(a_n) = \left((1-\frac{1}{n})^n\right)$

b) $(b_n) = \left((1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n\right)$

Solución.

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1\cdot\frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n} = e.$$

Problema 10

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$.

Solución.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n-1)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{(a_n-1)\cdot b_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Problema 11

Aplicar el resultado del Problema 10 al cálculo del límite de $c_n = \left(\frac{n^2+5n+3}{n^2+n-1}\right)^{\frac{4n^2-2}{2n+1}}$

Solución. Si llamamos $a_n = \frac{n^2+5n+3}{n^2+n-1}$ y $b_n = \frac{4n^2-2}{2n+1}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, y por el Problema 10 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$. Así pues,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2}{2n+1}\left(\frac{n^2+5n+3}{n^2+n-1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2-2)(4n+4)}{(2n+1)(n^2+n-1)} = 8.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} c_n = e^8$.

Problema 12

Demostrar que una sucesión monótona creciente no acotada tiende a $+\infty$. Análogamente una sucesión monótona decreciente no acotada tiende a $-\infty$.

Solución. Que una sucesión (a_n) tiende a $+\infty$ (sucesión cuyo límite es $+\infty$) significa que dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_n \geq M$ para todo $n \geq n_0$.

La sucesión (a_n) es monótona creciente, luego para todo $n \in \mathbf{N}$ se verifica $a_n \leq a_{n+1}$.

Por otro lado, al ser la sucesión (a_n) no acotada, dado $M > 0$, existirá $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_{n_0} > M$. Luego, para todo $n \geq n_0$ se tiene $M < a_{n_0} \leq a_n$, por lo tanto, la sucesión (a_n) tiende a $+\infty$ como queríamos demostrar.

Veamos ahora que toda sucesión monótona decreciente no acotada tiende a $-\infty$. Si (a_n) es una sucesión monótona decreciente no acotada entonces $(-a_n)$ es una sucesión monótona creciente no acotada y, por lo visto en el párrafo anterior, resulta que $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$.

Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty} a_n = -(\lim_{n\to\infty}(-a_n)) = -(+\infty) = -\infty$, como queríamos demostrar.

TEMA 20

Funciones

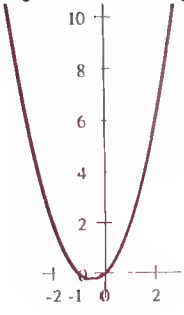
Problema 1

Dibujar la gráfica de la función que a cada número real le asocia el mismo número más su cuadrado.

Solución. Esta función puede expresarse analíticamente como (la función que a cada número real x le hace corresponder f(x) donde) $f(x) = x^2 + x$. Si damos algunos valores a la variable x, entonces calculamos los correspondientes valores de f(x) (basta sustituir el valor que toma x por x en la expresión de f(x)), obteniendo la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
x^2+x	6	2	0	0	2	6	12	...

Esta tabla de números se puede interpretar como un conjunto de pares ordenados de números {(-3,6), (-2,2), (-1,0), (0,0), (1,2), (2,6), (3,12),. . .} que se dibujan en el plano como puntos de este plano. Los puntos de la tabla más todos los posibles pares de números de la forma (x,f(x)) dibujados en el plano de ejes X e Y dan lugar a la gráfica de la función.

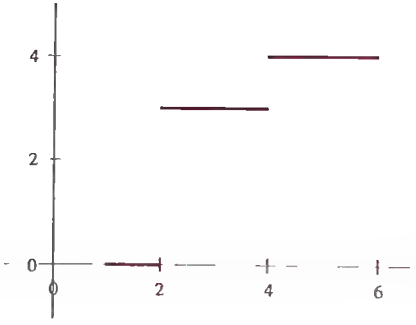


Problema 2

Dibujar la gráfica de la función definida en el intervalo $[1,6]$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ 4 & \text{si} \quad 4 \le x \le 6 \end{cases}.$$

Solución. La función f toma únicamente tres valores. Si $1 \le x < 2$, entonces f(x) vale 0, si $2 \le x < 4$, entonces f(x) vale 3, y si $4 \le x \le 6$, entonces f(x) vale 4. En cada uno de los intervalos [1,2), [2,4) y [4,6] la función es constante, es decir toma un único valor.



Problema 3

Dadas las funciones reales de variable real $f_1(x) = 2x^2 - 3x$ y $f_2(x) = 2x - 1$, calcular la expresión de cada una de las siguientes funciones y el valor que toman en $x = 1$.

a) $(f_1 + f_2)(x)$ b) $(f_1 - f_2)(x)$

c) $(f_1 \cdot f_2)(x)$ c) $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(x)$

Solución. Se sustituye cada función por su expresión y se opera.

a) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (2x^2 - 3x) + (2x - 1) = 2x^2 - x - 1$

$(f_1 + f_2)(1) = 0$ (el valor de la función suma en $x = 1$ se obtiene al sustituir en su expresión la x por 1).

b) $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = (2x^2 - 3x) - (2x - 1) = 2x^2 - 5x + 1$.

$(f_1 - f_2)(1) = -2$.

c) $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (2x^2 - 3x) \cdot (2x - 1) = 4x^3 - 8x^2 + 3x$.

$(f_1 \cdot f_2)(1) = -1$.

d) $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{2x^2-3x}{2x-1}$ (esta expresión no es válida para $x = 1/2$)

y $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(1) = -1$.

Problema 4

Dadas las funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Calcular:

a) $(f_1 + f_2)(x)$ b) $(f_1 - f_2)(x)$

c) $(f_1 \cdot f_2)(x)$ d) $(3f_1 - 2f_2)(x)$

Solución. Por ser f_1 y f_2 funciones definidas a trozos, lo primero que hacemos es fraccionar el dominio de ambas funciones de la misma manera, es decir, reescribir las funciones de la siguiente forma:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$$

De esta forma se puede proceder como en el problema anterior, en cada zona del dominio que se considere, con la expresión adecuada de las funciones.

a) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \begin{cases} (x^2+1)+(2x) & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x+(x-1) & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$.

Así pues, $(f_1 + f_2)(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 3x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$.

b) $(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$.

c) $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = \begin{cases} 2x^3+2x & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x^2-x & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$.

d) $(3f_1 - 2f_2)(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$

Problema 5

Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones reales de variable real:

a) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-5x+6}$ b) $h(x) = \dfrac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$.

Solución. Se procede a estudiar el dominio viendo donde no está definida la función, es decir, determinando los números para los cuales su expresión analítica carece de sentido. Por ser en los dos casos una función racional (cociente de funciones polinómicas, la única posibilidad de que un cociente de números carezca de sentido es que el denominador sea cero) tenemos que ver para qué números se anula el denominador.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ para los valores $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Luego, la expresión no tiene sentido para $x = 2$ o $x = 3$, es decir, el dominio de g(x) es $\mathbf{R}$-{2,3} o expresado de otra forma $(-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

b) Para resolver la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ descomponemos el polinomio en factores primos, para ello, aplicamos la regla de Ruffini:

1)

	1	-6	11	-6
		1	-5	6
	1	-5	6	0

y 2)

	1	-5	6
		2	-6
	1	-3	0

De lo cual resulta que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ y, por lo tanto, el denominador se anula si se anula cualquiera de los tres factores (para x=1 o para x=2 o para x=3). Luego, el dominio de h(x) es $\mathbf{R}$-{1,2,3} o $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

Problema 6

Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones reales de variable real:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x^2}}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{2x+3}}$

c) $h(x) = \sqrt{x^3+3x^2-4x}$ d) $i(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+3x^2-4x}{x^2+2x-8}}$

Solución.

a) La expresión de la función f(x) carece de sentido como número real (si el denominador de la fracción se anula o si el radicando es un número negativo) para $x \in \mathbf{R}$ tal que $x^2 = 0$ o tal que $\dfrac{x+2}{x^2} < 0$.

De $x^2 = 0$ se obtiene $x = 0$, y como $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, se tiene que $\dfrac{x+2}{x^2} < 0$ si $x+2 < 0$, es decir, para $x < -2$.

El dominio de definición de f(x) es: $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

b) La función g(x) no estará definida para $x \in \mathbf{R}$ tal que $2x+3 = 0$ o tal que $\dfrac{x-2}{2x+3} < 0$ (pues resulta una división por cero o una raíz cuadrada de un número negativo).

De $2x+3 = 0$ se obtiene $x = -\dfrac{3}{2}$. Para resolver la inecuación se resuelve la ecuación $x-2 = 0$, cuya solución es $x = 2$, y se estudia el signo del radicando en cada uno de los siguentes intervalos

$$(-\infty, -\frac{3}{2}), \ (-\frac{3}{2}, 2) \ \text{y} \ (2, +\infty).$$

	$x-2$	$2x+3$	$\dfrac{x-2}{2x+3}$	$\sqrt{\dfrac{x-2}{2x+3}}$
$x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$	–	–	+	existe
$x \in (-\frac{3}{2}, 2)$	–	+	–	no existe
$x \in (2, +\infty)$	+	+	+	existe

El dominio de definición de g(x) es $(-\infty, -\dfrac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$. (En $-\frac{3}{2}$ el intervalo figura abierto pues en este punto el denominador se anula y por tanto la variable x no puede tomar este valor. En 2 aparece cerrado ya que $x = 2$ es un valor que anula el numerador, por tanto el cociente $\dfrac{x-2}{2x+3}$ vale cero y la raíz existe).

c) La función h(x) no está definida para $x \in \mathbf{R}$ tal que $x^3+3x^2-4x < 0$. Para resolver esta inecuación se resuelve inicialmente la ecuación $x^3+3x^2-4x = 0$.

$$x^3+3x^2-4x = x(x^2+3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x^2+3x-4=0) \Rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

Seguidamente se estudia el signo de h(x) que se reescribe $h(x) = \sqrt{x(x+4)(x-1)}$, puesto que $x^3+3x^2-4x = x(x+4)(x-1)$, en los intervalos

$$(-\infty,-4)\ ,\ (-4,0)\ ,\ (0,1)\ \text{y}\ (1,+\infty)\ .$$

	x	x+4	x−1	x(x+4)(x−1)	$\sqrt{x(x+4)(x-1)}$
$x \in (-\infty,-4)$	−	−	−	−	no existe
$x \in (-4,0)$	−	+	−	+	existe
$x \in (0,1)$	+	+	−	−	no existe
$x \in (1,+\infty)$	+	+	+	+	existe

El dominio de definición de h(x) es: $[-4,0] \cup [1,+\infty)$.

d) La función i(x) no esta definida para $x \in \mathbf{R}$ tal que $x^2+2x-8 = 0$ o tal que $\dfrac{x^3+3x^2-4x}{x^2+2x-8} < 0$.

Los valores que anulan al denominador son

$$x^2+2x-8 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases} \text{ y, por tanto, } x^2+2x-8 = (x+4)(x-2)\ .$$

Para resolver la inecuación tenemos del anterior apartado que

$$x^3+3x^2-4x = x(x+4)(x-1)\ .$$

Se estudia el signo del radicando de la función i(x), $i(x) = \sqrt{\dfrac{x(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-2)}}$,

	x	x+4	x−1	x−2	$\dfrac{x(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-2)}$	$\sqrt{\dfrac{x(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-2)}}$
$x \in (-\infty, -4)$	−	−	−	−	−	no existe
$x \in (-4, 0)$	−	+	−	−	−	no existe
$x \in (0, 1)$	+	+	−	−	+	existe
$x \in (1, 2)$	+	+	+	−	−	no existe
$x \in (2, +\infty)$	+	+	+	+	+	existe

El dominio de definición de i(x) es $[0,1] \cup (2, +\infty)$.

Problema 7

Dadas las funciones reales de variable real $f(t) = t^2+1$, $g(y) = y+1$ y $h(z) = 3z-2$, determinar las expresiones de las siguientes funciones:

$$f \circ g,\ f \circ h,\ g \circ f,\ h \circ f,\ g \circ h,\ h \circ g,\ y\ \ f \circ g \circ h .$$

Solución.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2+1 = x^2+2x+2$.

$f \circ h(x) = f(h(x)) = f(3x-2) = (3x-2)^2+1 = 9x^2-12x+5$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = x^2+1+1 = x^2+2$.

$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(x^2+1) = 3(x^2+1)-2 = 3x^2+1$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(3x-2) = 3x-2+1 = 3x-1$.

$h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x+1) = 3(x+1)-2 = 3x+1$.

$f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(3x-2)) = f(3x-2+1) = f(3x-1)$

$= (3x-1)^2+1 = 9x^2-6x+2$.

Problema 8

Dadas las funciones $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}$ y $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \to \frac{1}{x^2} \qquad x \to \frac{x}{x+1} \qquad x \to x-2$$

Determinar $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ h$ $h \circ f$, $f \circ g \circ h$ y $h \circ g \circ f$.

Solución.

$$\# \; f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{-1,0\}$ puesto que g no está definida en -1 y, g(x) se anula únicamente para $x = 0$ y f no está definida para $x = 0$ (obsérvese que la expresión obtenida únicamente no está definida en $x = 0$ y sin embargo el dominio de la composición es otro) .

$$\# \; g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{1+x^2},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{0\}$ puesto que f no está definida para $x = 0$ y f(x) nunca alcanza el valor -1 que es donde no está definida g.

$$\# \; g \circ h(x) = g(h(x)) = g(x-2) = \frac{x-2}{x-2+1} = \frac{x-2}{x-1},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{1\}$ puesto que g no está definida para $x = -1$ y h(x) alcanza el valor -1 para $x = 1$.

$$\# \; h \circ g(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1} - 2 = \frac{-x-2}{x+1},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{-1\}$ puesto que g no está definida para $x = -1$.

$$\# \; f \circ h(x) = f(h(x)) = f(x-2) = \frac{1}{(x-2)^2},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{2\}$ puesto que f no está definida para $x = 0$ y h(x) alcanza el valor 0 para $x = 2$.

$$\# \; h \circ f(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{1-2x^2}{x^2},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{0\}$ puesto que f no está definida para $x = 0$.

$$\# \; f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x))) = f(g(x-2)) = f\left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2},$$

cuyo dominio es $\mathbf{R}-\{1,2\}$ puesto que g no está definida para $x = -1$ y h(x) alcanza el valor -1

para x = 1, y f no está definida para x = 0 y g(h(x)) alcanza el valor 0 para x = 2 (obsérvese que la expresión obtenida únicamente no tiene sentido para x=2).

$$\#\ hogof(x) = h(g(f(x))) = h(g(\frac{1}{x^2})) = h\left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = h(\frac{1}{1+x^2})$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - 2 = \frac{-1-2x^2}{1+x^2}$$, cuyo dominio es **R**-{0} puesto que f no está definida para x = 0 y f(x) nunca alcanza el valor -1 que es donde no está definida g (obsérvese que la expresión obtenida existe para cualquier número real x).

Problema 9

Calcular las funciones inversas de las siguientes funciones:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \to 3x+2$

b) $g: \mathbf{R} - \{4\} \to \mathbf{R} - \{0\}$
$x \to \frac{5}{x-4}$

c) $h: \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R} - \{3\}$
$x \to \frac{3x+2}{x-1}$

d) $i: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$x \to 1 + \sqrt[5]{3x+2}$

Comprobar que:

e) $h \circ h^{-1} = I_{\mathbf{R}-\{3\}}$; $h^{-1} \circ h = I_{\mathbf{R}-\{1\}}$ f) $i \circ i^{-1} = I_{\mathbf{R}}$; $i^{-1} \circ i = I_{\mathbf{R}}$

Solución. Una función se llama función inversa de la función f, se denota por f^{-1}, si verifica que $f^{-1}(f(x)) = x$ para cualquier x del dominio de f y $f(f^{-1}(x)) = x$ para cualquier x del dominio de f^{-1}. Para poder determinar la expresión de la función inversa se suele sustituir la f(x) por una nueva variable y tratar de despejar x en función de esa nueva variable.

a) Sustituimos f(x) por la variable y, $y = 3x+2$, despejamos x en función de la variable y, $x = \frac{y-2}{3}$. Seguidamente, intercambiamos las variables x e y para obtener la expresión de la función inversa, $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

b) Escribimos $y = \frac{5}{x-4}$, despejamos x, $yx - 4y = 5$; $x = \frac{5+4y}{y}$, intercambiamos x e y, $g^{-1}(x) = \frac{5+4x}{x}$

c) Escribimos $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$,

despejamos x, $yx - y = 3x + 2$; $x(y-3) = y+2$; $x = \dfrac{y+2}{y-3}$,

intercambiamos x e y, $h^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.

d) Escribimos $y = 1 + \sqrt[5]{3x+2}$,

despejamos x, $(y-1)^5 = 3x+2$; $x = \dfrac{(y-1)^5 - 2}{3}$,

intercambiamos x e y, $i^{-1}(x) = \dfrac{(x-1)^5 - 2}{3}$.

e) $h \circ h^{-1}(x) = h(h^{-1}(x)) = h\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) = \dfrac{3\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)+2}{\dfrac{x+2}{x-3}-1} = \dfrac{\dfrac{5x}{x-3}}{\dfrac{5}{x-3}} = x$.

$h^{-1} \circ h(x) = h^{-1}(h(x)) = h^{-1}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right) = \dfrac{\dfrac{3x+2}{x-1}+2}{\dfrac{3x+2}{x-1}-3} = \dfrac{\dfrac{5x}{x-1}}{\dfrac{5}{x-1}} = x$.

f) $i \circ i^{-1}(x) = i(i^{-1}(x)) = i\left(\dfrac{(x-1)^5 - 2}{3}\right) = 1 + \sqrt[5]{3 \cdot \dfrac{(x-1)^5 - 2}{3} + 2}$

$= 1 + \sqrt[5]{(x-1)^5} = 1 + x - 1 = x$.

$i^{-1} \circ i(x) = i^{-1}(i(x)) = i^{-1}(1 + \sqrt[5]{3x+2}) = \dfrac{(1+\sqrt[5]{3x+2}-1)^5 - 2}{3}$

$= \dfrac{(\sqrt[5]{3x+2})^5 - 2}{3} = \dfrac{3x+2-2}{3} = x$.

Problema 10

Estudiar si las siguientes funciones son monótonas crecientes o decrecientes en sus dominios.

a) $f_1(x) = x + 1$

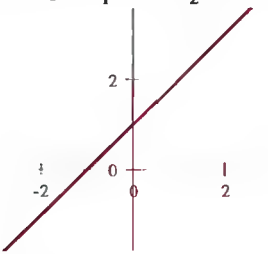
b) $f_2(x) = x^2 + 1$

c) $f_3(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f_4(x) = -\dfrac{5x-1}{3}$

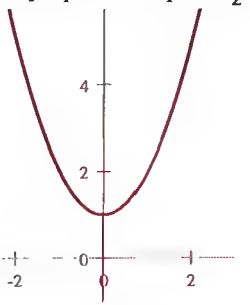
Solución.

a) La función f_1 es monótona creciente ya que para cualquier par de números de su dominio tales que $x_1 \leq x_2$ se verifica que $x_1 + 1 \leq x_2 + 1$, es decir, $f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$.



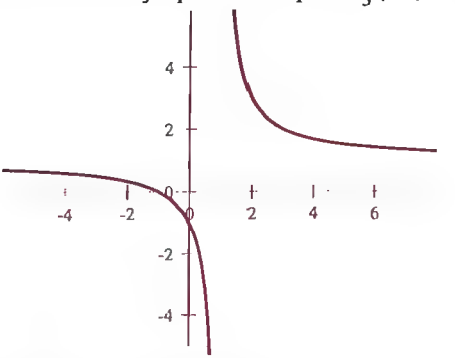
b) La función f_2 no es monótona creciente ya que, por ejemplo, $-5 \leq 1$ y, sin embargo, $f_2(1) = 2 \leq 26 = f_2(-5)$

Tampoco es monótona decreciente ya que $1 \leq 2$ pero $f_2(1) = 2 \leq 5 = f_2(2)$.



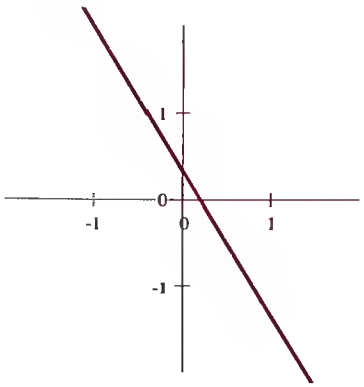
c) Esta función f_3 no es monótona creciente ya que se tiene que, por ejemplo, $-1 \leq 0$ y sin embargo $f_3(0) = -1 \leq 0 = \frac{0}{-2} = f_3(-1)$.

Tampoco es monótona decreciente ya que $-1 \leq 2$ pero $f_3(-1) = 0 \leq 3 = f_3(2)$.



d) La función f_4 es monótona decreciente ya que si $x_1 \leq x_2$, entonces (al multiplicar por 5, la

desigualdad de mantiene) $5x_1 \leq 5x_2$. Además, (al sumar a los dos términos el mismo número, la desigualdad se mantiene) $5x_1 - 1 \leq 5x_2 - 1$. Al multiplicar por $-\frac{1}{3}$ a los dos términos de la última desigualdad se obtiene que $-\frac{5x_1 - 1}{3} \geq -\frac{5x_2 - 1}{3}$, es decir, $f_4(x_2) \leq f_4(x_1)$.



Problema 11

Determinar si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^3|$ b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución.

a) Esta función está definida en todo **R** y es par ya que

$$f(-x) = |(-x)^3| = |-x^3| = |-1| \cdot |x^3| = 1 \cdot |x^3| = |x^3| = f(x) ,$$

para todo número real .

b) Esta función está definida en **R**-{0} y es impar ya que

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)} = \frac{(-1)^2 x^2 + 1}{-x} = \frac{x^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2 + 1}{x} = -f(x)$$

para todo número real.

Problema 12

Demostrar que las únicas funciones que son pares e impares a la vez son las funciones constantemente cero.

Solución. Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función par e impar a la vez. Entonces, para cualquier $x \in \mathbf{R}$

se verifica que:

$$f(-x) = f(x), \quad \text{por ser } f \text{ par,}$$

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{por ser } f \text{ impar.}$$

Por tanto, $-f(x) = f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$, de donde resulta que $2f(x) = 0$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Luego f es la función constantemente cero.

Problema 13

Demostrar que las funciones monótonas estrictas (crecientes o decrecientes) son inyectivas.

Solución. Sea f una función monótona estrictamente creciente (respectivamente decreciente) y supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces veamos que $x_1 = x_2$.

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$

y, por tanto,

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{o} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

(respectivamente $f(x_2) < f(x_1)$ o $f(x_1) < f(x_2)$),

lo cual es una contradicción con la suposición $f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto $x_1 = x_2$.

TEMA 21

Polinomios

Problema 1

Dados los polinomios $P = x^2 + x + 1$, $Q = x^2 - 1$, $R = 2x^2 + 5x - 1$ y $S = x^3 + x^2 + 1$, calcular:

a) $S + P$ b) $R - S$

c) $P \cdot Q$ d) $R \cdot S$

Solución.

a) Para sumar polinomios (utilizamos la misma estrategia que para sumar números de varias cifras) situamos las potencias de igual índice una encima de otra de forma que posteriormente las agrupamos.

	x^3	$+x^2$		$+1$	S (primer polinomio sumando)
$+$		x^2	$+x$	$+1$	P (segundo polinomio sumando)
	x^3	$+2x^2$	$+x$	$+2$	S + P (polinomio suma; se suma potencia a potencia)

b) Para restar polinomios utilizamos la misma estrategia que para sumar.

		$2x^2$	$+5x$	-1	R (polinomio minuendo)
$-$	x^3	$+x^2$		$+1$	S (polinomio sustraendo)
	$-x^3$	$+x^2$	$+5x$	-2	R - S (polinomio resta; se resta potencia a potencia)

c) Para multiplicar polinomios (utilizamos la misma estrategia que para multiplicar números de varias cifras)

situamos las potencias de igual índice una encima de otra de forma que posteriormente multipliquemos el polinomio superior, multiplicando, por cada uno de los monomios del polinomio inferior, multiplicador, y situemos estos resultados de forma ordenada para posteriormente sumarlos.

		x^2	$+x$	$+1$	P (polinomio multiplicando)
	$\times$	$+x^2$		-1	Q (polinomio multiplicador)
		$-x^2$	$-x$	-1	(producto del multiplicando por -1)
x^4	$+x^3$	$+x^2$			(producto del multiplicando por $+x^2$)
x^4	$+x^3$		$-x$	-1	P·Q (polinomio producto: suma de los dos productos parciales)

c) De igual forma que en el apartado anterior.

R				$2x^2$	$+5x$	-1
S		$\times$	x^3	$+x^2$		$+1$
				$+2x^2$	$+5x$	-1
		$2x^4$	$+5x^3$	$-x^2$		
	$2x^5$	$+5x^4$	$-x^3$			
R·S	$2x^5$	$+7x^4$	$+4x^3$	$+x^2$	$+5x$	-1

Problema 2

Sean $P = x^3 + ax^2 + bx + c$ y $Q = x^3 + 4x^2 - x + 2$, calcular $a, b, c \in \mathbf{R}$ de manera que el polinomio $P \cdot Q$ solo tenga coeficientes no nulos en las potencias pares de x.

Solución. Al multiplicar P por Q (siguiendo los mismos pasos que en el ejercicio anterior) se obtiene:

$$P \cdot Q = x^6 + (a+4)x^5 + (b+4a-1)x^4 +$$

$$+ (c+4b-a+2)x^3 + (4c-b+2a)x^2 + (-c+2b)x + 2c.$$

Como los coeficientes en potencias impares deben de ser cero, entonces se cumple que

$$\left.\begin{array}{rr} 4+a=0 \\ c+4b-a+2=0 \\ -c+2b=0 \end{array}\right\} \approx \left.\begin{array}{rr} a & =-4 \\ -a+4b+c & =-2 \\ 2b-c & =0 \end{array}\right\}.$$

Luego, $a = -4$, $b = -1$ y $c = -2$ son las soluciones del sistema.

Problema 3

Efectuar las siguientes divisiones entre polinomios:

a) $(x^3 + x^2 - 1) \div (x - 1)$

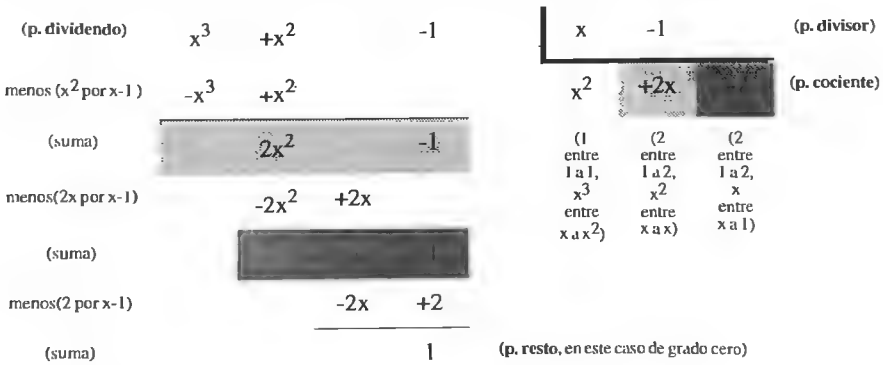
b) $(x^4 + x^3 - x) \div (x^2 + x + 1)$

c) $(x^6 + 3x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 2) \div (x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1)$.

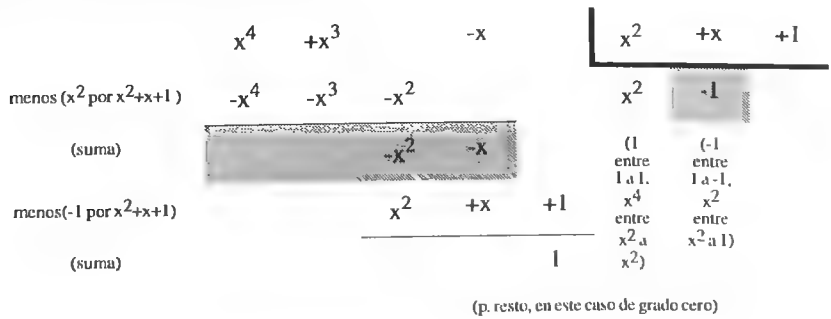
d) $(x^4 - x^3 - x + 1) \div (2x^2 - x - 1)$.

Solución.

a) Utilizamos un algoritmo análogo al de la división de números enteros.



b) Utilizamos el algoritmo anterior.



c) Procedemos de igual forma.

x^6		$+3x^4$	$-x^3$	$+6x^2$	$-3x$	$+2$	x^4	$+x^3$	$+2x^2$	$-x$ $+1$
$-x^6$	$-x^5$	$-2x^4$	$+x^3$	$-x^2$			x^2	$-x$	$+2$	
	$-x^5$	$+x^4$		$+5x^2$	$-3x$	$+2$				
	$+x^5$	$+x^4$	$+2x^3$	$-x^2$	$+x$					
		$+2x^4$	$+2x^3$	$+4x^2$	$-2x$	$+2$				
		$-2x^4$	$-2x^3$	$-4x^2$	$+2x$	-2				
						0				

d) Análogamente,

x^4	$-x^3$		$-x$	$+1$	$2x^2$	$-x$	-1	
$-x^4$	$+\frac{1}{2}x^3$	$+\frac{1}{2}x^2$			$\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{4}x$	$+\frac{1}{8}$	
	$-\frac{1}{2}x^3$	$+\frac{1}{2}x^2$	$-x$	$+1$				
	$\frac{1}{2}x^3$	$-\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{1}{4}x$					
		$\frac{1}{4}x^2$	$-\frac{5}{4}x$	$+1$				
		$-\frac{1}{4}x^2$	$+\frac{1}{8}x$	$+\frac{1}{8}$				
			$-\frac{9}{8}x$	$+\frac{9}{8}$				

Problema 4

Calcular el valor de m para que el resto de la división del polinomio $x^3 + mx^2 - 2x + m$ entre $x - 1$ sea 1.

Solución. Determinamos el resto de la división, que por ser el divisor un polinomio de primer grado de la forma $x + a$, puede efectuarse la división aplicando la regla de Ruffini.

	(coeficiente de x^3)	(coeficiente de x^2)	(coeficiente de x)	(término independiente)	
(factor)	1	m	-2	m	(dividendo)
1		1	m+1	m-1	
	1	m+1	m-1	2m-1	(resto)

Así pues, el cociente es $x^2 + (m + 1)x + (m-1)$ y el resto es $2m - 1$. Al imponer que el resto sea 1, $2m - 1 = 1$, se obtiene que $m = 1$.

Problema 5

Determinar el polinomio $ax^2 + bx + 4$ sabiendo que es divisible por $x + 2$, y que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 1$ y $x + 3$ son iguales.

Solución. Los tres divisores son de la forma $x + a$, (se puede utilizar la regla de Ruffini),

	a	b	4
-2		-2a	4a-2b
	a	-2a+b	4a-2b+4

	a	b	4
-1		-a	a-b
	a	-a+b	a-b+4

	a	b	4
-3		-3a	9a-3b
	a	-3a+b	9a-3b+4

Como son iguales los restos correspondientes a los divisores $x+1$ y $x+3$, se obtiene la ecuación $a-b+4 = 9a-3b+4$, es decir, $4a-b = 0$.

Al ser el polinomio divisible por $x+2$ (el resto de la división es cero) se obtiene la ecuación $4a-2b+4 = 0$. Por lo tanto los coeficientes verifican las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 4a-b=0 \\ 4a-2b+4=0 \end{cases}, \text{ de solución } a = 1,\ b = 4.$$

Conclusión: El polinomio pedido es x^2+4x+4.

Problema 6

Calcular el resto de la división de $P = (x-3)^{2n} + (x-2)^n + 2$ por $S = (x-3)(x-2)$.

Solución. Como el polinomio S es de grado 2, entonces el resto de la división debe tener a lo más grado 1. Supongamos que dicho resto es $R = ax+b$. Entonces:

$$(x-3)^{2n} + (x-2)^n + 2 = ((x-3)(x-2)) \cdot Q + (ax+b),$$

donde Q es el polinomio cociente.

Se consideran $P(x), S(x), Q(x)$ y $R(x)$, la funciones polinómicas asociadas a los polinomios P, S, Q y R respectivamente, y calculamos P(2) y P(3):

$$P(2) = (2-3)^{2n} + (2-2)^n + 2 = (-1)^{2n} + 2 = 3,$$

por otra parte, como $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + (ax+b)$;

$$P(2) = ((2-3)(2-2)) \cdot Q + (a2+b) = 2a+b.$$

Luego $2a+b = 3$.

$$P(3) = (3-3)^{2n} + (3-2)^n + 2 = (1)^n + 2 = 3,$$

$$P(3) = ((3-3)(3-2)) \cdot Q + (a3+b) = 3a+b.$$

Luego $3a+b = 3$.

Del sistema $\begin{cases} 2a+b=3 \\ 3a+b=3 \end{cases}$, obtenemos $a = 0$ y $b = 3$. Por tanto, $R = 3$.

Problema 7

Comprobar las siguientes identidades de polinomios:

a) $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ b) $(x-1)^2 = x^2-2x+1$

c) $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ d) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Solución.

a) Al aplicar el binomio de Newton se tiene:

$$(x+1)^2 = \binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}x+\binom{2}{2} = x^2+2x+1.$$

b) Análogamente, al aplicar el binomio de Newton se tiene:

$$(x-1)^2 = \binom{2}{0}x^2-\binom{2}{1}x+\binom{2}{2} = x^2+(-2)x+1.$$

c) Al multiplicar el segundo miembro se obtiene el primero.

$$(x+1)(x-1) = x(x-1)+(x-1) = x^2-x+x-1 = x^2-1.$$

d) Al multiplicar el segundo miembro se obtiene el primero.

$$(x-1)(x^2+x+1) = x(x^2+x+1)-(x^2+x+1) =$$
$$= x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1.$$

Problema 8

Estudiar la descomposición en factores irreducibles de los polinomios siguientes:

a) x^4-1 b) x^3-3x^2+2x

c) x^2+2 d) x^4-x^2-2

e) x^4+x^2-12 f) $2x^4-3x^2-5$

Solución.

a) El polinomio x^4-1 (es una diferencia de cuadrados) se puede escribir de la forma:

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1),$$

puesto que $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Así pues, el polinomio es reducible en factores.

Los polinomios de primer grado $x-1$ y $x+1$ son factores irreducibles, y el polinomio de segundo grado x^2+1 también lo es puesto que no se puede expresar como producto de factores irreducibles de primer grado que posean coeficientes reales.

Las raíces reales del polinomio son: $x=1$ por el factor $x-1$, $x=-1$ por el factor $x+1$. Del factor x^2+1 se tienen raíces complejas: $x=i$ y $x=-i$.

b) El polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x$ no posee término independiente, así pues, se puede extraer x como factor común.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2),$$

puesto que $x = 2$ y $x = 1$ son las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$, que puede expresarse de la forma $(x-1)(x-2) = 0$. Así pues, el polinomio no es irreducible.

Las raíces son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ correspondientes a los factores x, $x - 1$ y $x - 2$.

c) Las soluciones de la ecuación $x^2 + 2 = 0$ son $x = -\sqrt{2}\,i$ y $x = \sqrt{2}\,i$, es decir, la ecuación se puede escribir de la forma $(x + \sqrt{2}\,i)(x - \sqrt{2}\,i) = 0$ Así pues, el polinomio $x^2 + 2$ no posee raíces reales y por tanto se trata de un polinomio irreducible.

d) La ecuación $x^4 - x^2 - 2 = 0$ es una ecuación bicuadrada. Al hacer el cambio de incógnita $x^2 = t$ se obtiene la ecuación de segundo grado $t^2 - t - 2 = 0$ que tiene por raíces $t = 2$ y $t = -1$. Por tanto, $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$, es decir,

$$x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1).$$

Como el polinomio $x^2 - 2$ no es irreducible pues, se trata de una diferencia de cuadrados, $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$, mientras que el polinomio $x^2 + 1$ si lo es, entonces se tiene la factorización siguiente:

$$x^4 - x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1).$$

Las raíces reales son $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$, y las raíces complejas son $x = -i$ y $x = i$.

e) Análogamente al apartado anterior, se tiene que $x^4 + x^2 - 12 = 0$ es una ecuación bicuadrada. Tomamos $t = x^2$ y obtenemos la ecuación de segundo grado $t^2 + t - 12 = 0$ que tiene por solución $t = 3$ y $t = -4$. Por tanto $t^2 + t - 12 = (t-3)(t+4)$, luego

$$x^4 + x^2 - 12 = (x^2 - 3)(x^2 + 4).$$

El polinomio $x^4 + x^2 - 12$ no es irreducible. Se estudia ahora la descomposición en polinomios irreducibles.

La ecuación $x^2 - 3 = 0$ tiene por solución $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, y las raíces de $x^2 + 4 = 0$ son $x = 2i$ y $x = -2i$. Por tanto:

$$x^4 + x^2 - 12 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 4)$$

f) Como en los dos apartados anteriores, dado que $2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$ es una ecuación bicuadrada con coeficiente principal 2,

$$2t^2-3t-5=0\Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{4}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\\ t=-1\end{cases},$$

por tanto, $2x^4-3x^2-5=2(x^2-\frac{5}{2})(x^2+1)$. Además, $\sqrt{\frac{5}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ son raíces del polinomio $2x^4-3x^2-5$, luego,

$$2x^4-3x^2-5=2(x-\sqrt{\frac{5}{2}})(x+\sqrt{\frac{5}{2}})(x^2+1).$$

Problema 9

Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios

$$P=x^4-x^2,\ Q=x^3-2x^2+x \text{ y } R=x^3+2x^2+x.$$

Solución. El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de polinomios se definen de forma análoga a los correspondientes para números enteros. El máximo común divisor de varios polinomios es el polinomio de mayor grado divisor de todos ellos y el mínimo común múltiplo de varios polinomios es el polinomio de menor grado múltiplo de todos ellos.

Descomponemos los polinomios P, Q y R en factores irreducibles:

$$P=x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1).$$

$$Q=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2.$$

$$R=x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2.$$

Por tanto, m.c.d.(P,Q,R) $=x$ y m.c.m.(P,Q,R) $=x^2(x+1)^2(x-1)^2$.

Problema 10

Descomponer en fracciones simples las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

b) $\dfrac{x^2}{x^3+3x^2+3x+2}$

c) $\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$

d) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x-2}{2x^2+5x+3}$

e) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}$

f) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

Solución. Descomponer una fracción irreducible en fracciones simples consiste en reescribir la fracción como suma de fracciones irreducibles cuyos denominadores son factores irreducibles del denominador de la fracción.

a) El denominador posee $x-1$, $x-2$ y $x-3$ como factores irreducibles (las fracciones irreducibles donde el denominador es de grado uno poseen un numerador que es un número), se tiene

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3} = \text{(al operar el segundo miembro)}$$

$$= \frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \text{(al sacar factor común)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2+(-5a-4b-3c)x+(6a+3b+2c)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Al igualar los numeradores del primer y último término de las igualdades se obtiene

$$1 = (a+b+c)x^2+(-5a-4b-3c)x+(6a+3b+2c),$$

y al identificar coeficientes de uno y otro miembro de la última igualdad entre polinomios, aparece el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=0 \\ 6a+3b+2c=1 \end{array}\right\}, \text{ de solución } a=\frac{1}{2},\ b=-1 \text{ y } c=\frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{2(x-3)}$.

b) Se factoriza el denominador en polinomios irreducibles (con la regla de Ruffini para el factor $x+2$), luego, $x^3+3x^2+3x+2 = (x+2)(x^2+x+1)$ y la ecuación $x^2+x+1=0$ no tiene solución real. Por tanto, (una fracción irreducible donde el denominador es de grado dos tiene como grado del numerador a lo más uno)

$$\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+2} = \frac{x^2}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{a(x^2+x+1)+(x+2)(bx+c)}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)x^2+(a+c+2b)x+(a+2c)}{(x+2)(x^2+x+1)}$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+2b+c=0 \\ a+2c=0 \end{array}\right\}, \text{ de solución } a=\frac{4}{3},\ b=-\frac{1}{3} \text{ y } c=-\frac{2}{3}$$

Así pues, $\dfrac{x^2}{x^3+3x^2+3x+2} = \dfrac{4}{3(x+2)}+\dfrac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1} = \dfrac{4}{3(x+2)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$.

c) $$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-4} =$$

$$= \frac{a(x-3)(x-4)+b(x-2)(x-4)+c(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)} =$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2+(-7a-6b-5c)x+(12a+8b+6c)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+\ b+\ c=1 \\ -7a-6b-5c=0 \\ 12a+8b+6c=1 \end{array}\right\}, \text{ de solución } a=\frac{5}{2},\ b=-10 \text{ y } c=\frac{17}{2}.$$

Por tanto, $$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{5}{2(x-2)}-\frac{10}{x-3}+\frac{17}{2(x-4)}.$$

d) Esta fracción no es irreducible, pues el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, así pues, se efectúa el cociente de los polinomios, resultando

$$\frac{2x^3+3x^2-2x-2}{2x^2+5x+3} = (x-1)+\frac{1}{2x^2+5x+3}$$

El denominador $2x^2+5x+3$ tiene por raíces $x=-1$ y $x=-\frac{3}{2}$, por tanto

$$\frac{1}{2x^2+5x+3} = \frac{1}{2(x+1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{a(x+\frac{3}{2})+b(x+1)}{(x+1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{ax+\frac{3}{2}a+bx+b}{(x+1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{(a+b)x+(\frac{3}{2}a+b)}{(x+1)(x+\frac{3}{2})}$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a+\ b=0 \\ \frac{3}{2}a+b=\frac{1}{2} \end{array}\right\}, \text{ de solución } a=1 \text{ y } b=-1.$$

Por tanto, $$\frac{2x^3+3x^2-2x-2}{2x^2+5x+3} = x-1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}.$$

e) $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-3} = \frac{(ax+b)(x-3)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{(a+c)x^2+(b-3a)x+(-3b+c)}{(x^2+1)(x-3)}.$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = \frac{1}{10}$, $b = \frac{3}{10}$ y $c = \frac{9}{10}$.

Por lo tanto, $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}}{x^2+1} + \frac{\frac{9}{10}}{x-3} = \frac{x+3}{10(x^2+1)} + \frac{9}{10(x-3)}.$$

f) $$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{(a+c)x^3+(a+b+d)x^2+(a+b+c)x+(b+d)}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = 1$.

Por lo tanto, $$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Problema 11

Descomponer en fracciones primarias las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x}{(x-5)^2(x+1)}$

b) $\dfrac{3x^2-13x+14}{(x-3)^2(x-1)}$

c) $\dfrac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2}$

d) $\dfrac{x^4-x^3+2x+9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)}$

Solución. Descomponer una fracción irreducible en fracciones primarias consiste en reescribir la fracción como suma de fracciones irreducibles cuyos denominadores son factores irreducibles, o potencias de estos si se repiten, del denominador de la fracción.

a) $$\frac{x}{(x-5)^2(x+1)} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{(x-5)^2} + \frac{c}{x+1} =$$

$$= \frac{(a+c)x^2 + (-4a+b-10c)x + (-5a+b+25c)}{(x-5)^2(x+1)}.$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = \frac{1}{36}$, $b = \frac{5}{6}$ y $c = -\frac{1}{36}$. Por tanto,

$$\frac{x}{(x-5)^2(x+1)} = \frac{\frac{1}{36}}{x-5} + \frac{\frac{5}{6}}{(x-5)^2} + \frac{-\frac{1}{36}}{x+1} = \frac{1}{36(x-5)} + \frac{5}{6(x-5)^2} - \frac{1}{36(x+1)}.$$

b) $$\frac{3x^2-13x+14}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} + \frac{c}{x-1} =$$

$$= \frac{(a+c)x^2 + (-4a+b-6c)x + (3a-b+9c)}{(x-3)^2(x-1)}$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Por tanto,

$$\frac{3x^2-13x+14}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

c) $$\frac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+(b+d)}{(x^2+1)^2}.$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 4$. Por tanto,

$$\frac{x^3+x+4}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)^2}.$$

d) $$\frac{x^4-x^3+2x+9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} + \frac{e}{x+1} =$$

$$= \frac{(a+c+e)x^4 + (b-3c+d-3e)x^3 + (-2a+2b-3d+e)x^2}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)} +$$

$$+ \frac{(-3a+2b+4c)x + (-2a+b+4d+4e)}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)}.$$

Al igualar los numeradores e identificar coeficientes, se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolver resulta $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$ y $e = 1$. Por tanto,

$$\frac{x^4-x^3+2x+9}{(x-2)^2(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x+1}$$

Problema 12

Hallar m para que la fracción $\dfrac{mx^2+2}{(x-1)^2x}$ se descomponga de la forma: $\dfrac{A}{(x-1)^2}+\dfrac{B}{x}$

Solución. La descomposición de la fracción es de la forma:

$$\frac{mx^2+2}{(x-1)^2x} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{(x-1)^2x}.$$

donde ha de ser $b = 0$.

Al igualar los numeradores, identificar coeficientes y resolver el sistema de ecuaciones resulta $a = 2$, $c = 4$ y $m = 2$. Por tanto,

$$\frac{2x^2+2}{(x-1)^2x} = \frac{2}{x}+\frac{4}{(x-1)^2}.$$

Problema 13

Simplificar las fracciones polinómicas siguientes:

a) $\dfrac{2x+2}{x^2-2x-3}$ b) $\dfrac{x^3+x^2+x}{x^4-x}$

Solución. Para simplificar una fracción polinómica descomponemos numerador y denominador en factores irreducibles y se eliminan los factores comunes.

a) $$\frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \frac{2(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{(x-3)},$$

puesto que $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$ al tener como raíces $x = 3$ y $x = -1$.

b) $$\frac{x^3+x^2+x}{x^4-x} = \frac{x(x^2+x+1)}{x(x^3-1)} = \frac{x(x^2+x+1)}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1},$$

pues $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

TEMA 22

Límites de funciones

Problema 1

Hallar los límites laterales de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2}$ en $x_0 = \sqrt{2}$, en $x_1 = \dfrac{1}{5}$ y en $x_2 = 0$.

b) $g(x) = x - E(x)$ en $x_0 = 2$ y en $x_1 = 2'5$.

Solución.

a) El numerador de f(x), 5x - 1, tiende a $5\sqrt{2} - 1$ cuando x tiende a $\sqrt{2}$ tanto para $x > \sqrt{2}$ como para $x < \sqrt{2}$, mientras que el denominador de f(x), $x^2 - 2$, tiende a 0 si x tiende a $\sqrt{2}$. Ahora bien, este denominador es positivo si $x > \sqrt{2}$ en un entorno del punto, y el numerador es también positivo, luego, f(x) es una función positiva a la derecha de $\sqrt{2}$, en un entorno de dicho punto. Así pues,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{5x-1}{x^2-2} = +\infty \quad \left(\text{en este caso } \frac{5\sqrt{2}-1}{0} \text{ se sustituye por } \infty\right).$$

Análogamente, el denominador es negativo si $x < \sqrt{2}$ en un entorno del punto, mientras que el numerador es positivo, luego, f(x) es una función negativa a la izquierda de $\sqrt{2}$, en un entorno de dicho punto. Así pues,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{5x-1}{x^2-2} = -\infty \quad \left(\text{en este caso } \frac{5\sqrt{2}-1}{0} \text{ se sustituye por } -\infty\right).$$

En el caso del punto $x_1 = \dfrac{1}{5}$ resulta que los límites laterales coinciden y valen cero.

$$\lim_{x \to 1/5^+} f(x) = \frac{0}{(\frac{1}{5})^2 - 2} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 1/5^-} f(x) = \frac{0}{(\frac{1}{5})^2 - 2} = 0.$$

En el caso de $x_2 = 0$ se tiene:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

b) La función E(x), parte entera de x, está definida por:

$$E(x) = n \qquad \text{si} \qquad n \leq x < n+1 \qquad n \in N.$$

Por tanto, $\lim_{x \to 2^+} E(x) = 2$ y $\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1$,

lo cual implica que:

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - E(x)) = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - E(x)) = 2 - 1 = 1.$$

En el caso del punto $x_1 = 2'5$ se tiene que los límites laterales son iguales (pues para valores de x suficientemente próximos a 2'5, E(x) = 2, ya sea x mayor o menor que 2'5. Luego, cuando x tiende a 2'5 por la derecha o por la izquierda, la función E(x) tiende a 2)

$$\lim_{x \to 2'5^+} (x - E(x)) = 2'5 - 2 = 0'5 \quad ; \quad \lim_{x \to 2'5^-} (x - E(x)) = 2'5 - 2 = 0'5$$

Problema 2

Hallar, si existe, el límite de las funciones siguientes:

a) $\lim_{x \to 7/2} E(x)$ b) $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}$.

Solución. Para resolver este problema tendremos en cuenta que si una función posee límites laterales en un punto y estos son iguales, entonces la función posee límite en ese punto y su valor es el mismo que el valor de los límites laterales.

a) Si x tiende a $\frac{7}{2}$:

por la derecha (para valores $x > \frac{7}{2} = 3'5$) se tiene que $\lim_{x \to 7/2^+} E(x) = 3$,

por la izquierda (para valores x cercanos a 3'5 con $x < 3'5$) se tiene que $\lim_{x \to 7/2^-} E(x) = 3$.

Conclusión: Existe el límite de esta función E(x) en $x = \frac{7}{2}$ y su valor es 3.

b) Si x tiende a 2 tomando valores mayores que 2, f(x) tiende a 0, es decir,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0.$$

En cambio, si x toma valores cercanos a 2 pero por la izquierda (valores x con $x < 2$) se tiene que el numerador, $x^2 - 4$, es negativo mientras que el denominador, $x - 1$, es positivo. Así pues, el cociente es negativo y su raíz no es un número real, por lo cual, no existe $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

Conclusión: Al no existir uno de los límites laterales la función f(x) no posee límite en 2.

Problema 3

Mediante la definición de límite probar las siguientes igualdades. Además, determinar un valor de δ correspondiente a $\varepsilon = 0'001$.

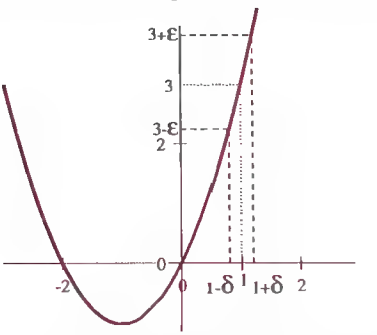
a) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x) = 3$ b) $\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2} = 3$.

Solución.

a) Veamos que si x se aproxima tanto como queramos a 1, los correspondientes valores de f(x) también se acercan cuanto queramos a 3. Es decir:

Dado $\varepsilon > 0$ (una distancia lo pequeña que sea) se puede determinar un número real $\delta > 0$ (otra distancia) dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x que verifican la condición $|x - 1| < \delta$ (la distancia de x a 1 es menor que δ), entonces se cumple que $|f(x) - 3| < \varepsilon$ (la distancia de f(x) a 3 es menor que ε).

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que hallar un $\delta > 0$ tal que si $|x - 1| < \delta$ entonces $|x^2 + 2x - 3| < \varepsilon$.



Para hallar δ debemos, mediante transformaciones convenientes, relacionar las dos desigualdades $|x^2 + 2x - 3| < \varepsilon$ y $|x - 1| < \delta$.

$$|x^2 + 2x - 3| = |(x-1)(x+3)| = |x-1||x+3|$$

Como $|x - 1|$ está acotado por δ ($|x - 1| < \delta$) necesitamos acotar la expresión $|x + 3|$,

$(|x + 3| \le |x| + 3) < (2 + 3) = 5$ (pues x toma valores muy próximos a 1, en particular, $0 < x < 2 \Rightarrow |x| < 2$).

Por tanto, $|x^2 + 2x - 3| = |x - 1||x + 3| < 5\delta$.

Basta que $5\delta = \varepsilon$, es decir $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, se tiene $|x^2 + 2x - 3| < \varepsilon$.

Además, para que f(x) se aproxime a 3 con un error menor que 0'001 basta que x se aproxime a 1 con un error menor que $\delta = \frac{0'001}{5} = 0'0002$.

b) Probemos que si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - 4| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

De $|f(x) - 3| = \left|\sqrt{25 - x^2} - 3\right|$, (si multiplicamos y dividimos por $\sqrt{25 - x^2} + 3$ para eliminar la raíz) obtenemos que

$$\left|\sqrt{25 - x^2} - 3\right| = \left|\frac{(\sqrt{25 - x^2})^2 - 3^2}{\sqrt{25 - x^2} + 3}\right| = \left|\frac{25 - x^2 - 9}{\sqrt{25 - x^2} + 3}\right| = \frac{|16 - x^2|}{\left|\sqrt{25 - x^2} + 3\right|},$$

y como $\left|\sqrt{25 - x^2} + 3\right|$ es mayor que 1 para cualquier valor de x,

$$\frac{|16 - x^2|}{\left|\sqrt{25 - x^2} + 3\right|} < |16 - x^2| = |4 - x||4 + x| < |4 - x|9 < 9\delta$$ (pues x es muy próximo a 4).

Basta que $9\delta = \varepsilon$, es decir $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$, se tiene $\left|\sqrt{25 - x^2} - 3\right| < \varepsilon$.

Además, para que f(x) se aproxime a 3 con un error menor que 0'001, $\varepsilon = 0'001 = \frac{1}{1000}$, basta que x se aproxime a 4 con un error menor que $\delta = \frac{1}{9000}$

Problema 4

Estudiar si existe, o no, el límite cuando x tiende a 0, y cuando x tiende a 1, de la función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida para cada $x \in \mathbf{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Solución. La expresión de f(x) cuando x está próxima a 0 por la izquierda de 0 es $f(x) = x^2 - 1$, luego $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1$.

Análogamente, la expresión de f cuando x tiende a 0 por la derecha es f(x) = x - 1, luego,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1.$$

Como los límites laterales coinciden, entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$.

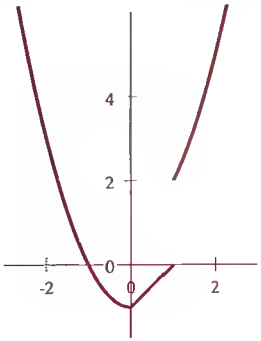
Cuando x toma valores cercanos a 1 y menores que 1 la función está definida por

$f(x) = x - 1$, por tanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$,

y a la derecha del $x = 1$ (para valores x que tienden a 1 con $x > 1$) se tiene

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2.$$

En $x = 1$ existen los límites laterales de la función pero no coinciden en su valor, luego no existe el límite de f(x).



Problema 5

Hallar, si existen, los límites en - 1 y 2 de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución.

En $x = -1$ se tiene que:

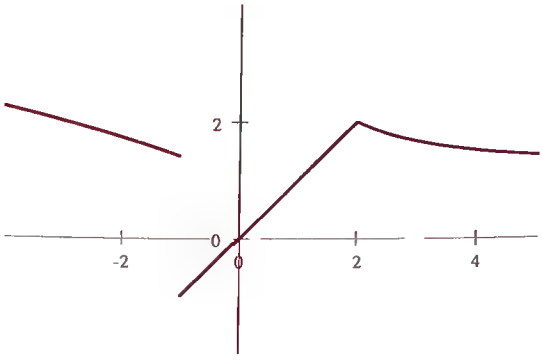
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x = -1,$$

así pues, en $x = -1$ no existe el límite de la función (los límites laterales no coinciden).

En $x = 2$ el límite de la función es 2. En efecto,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x = 2,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x} = 2.$$



Problema 6

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}$

Solución.

a) Al aplicar las propiedades algebráicas de los límites (sustituyendo x por 1) resulta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Para salvar esta indeterminación reducimos la expresión de la fracción polinómica (descomponiendo en factores irreducibles), para $x \neq 1$, se tiene

$$\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

luego, $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

b) Análogamente, (si sustituimos x por -2 en la expresión) se obtiene una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, que resolvemos al simplificar la fracción (aplicando la regla de Ruffini para a = -2)

$$\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2+x)} = \frac{x-3}{x^2+x}.$$

luego, $$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x} = \lim_{x \to -2} \frac{x-3}{x^2+x} = -\frac{5}{2}.$$

Problema 7

Estudiar si existe el límite en x = 1 de la función f: $\mathbf{R}-\{1\} \to \mathbf{R}$, definida para cada $x \neq 1$ por

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x^3 - 1}$

Solución.

a) Si hacemos tender x a 1 (obsérvese que la función no está definida en x=1, lo que no es obstáculo para la existencia del límite, pues para la existencia de éste sólo interesa valores de x cercanos a 1 y distintos de 1) resulta que si nos aproximamos por la izquierda $x^3 - 1$ tiende a 0 y es una expresión negativa, luego, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, en cambio, acercándonos por la derecha del 1, dicha expresión es positiva aunque tiende a 0, luego $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Conclusión: Como no coinciden los límites laterales, entonces no existe límite.

b) Al sustituir en el límite x por 1 en la expresión de f(x) aparece una indeterminación $\infty - \infty$, por ello se procede a reescribir la expresión de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

entonces, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x^2+x+1} = \dfrac{3}{3} = 1.$

Conclusión: En este caso existe el límite de f(x) en x = 1 y vale 1.

Problema 8

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)(2x^4 - 3x + 1)^3}{x+4}$

c) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})$ d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x - 6} \right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}$

Solución.

a) Al sustituir x por $+\infty$ en la expresión, resulta la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, que resolvemos dividiendo numerador y denominador por x^3 (la mayor potencia de x en toda la expresión).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\infty\,.$$

(puesto que $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^3}$ tienden a 0 si x tiende a $+\infty$).

b) Análogamente, aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ (pues el numerador tiende a ∞ y el denominador también).

Al considerar la expresión de f(x) como producto de dos factores,

$$\frac{(x+1)\,(2x^4-3x+1)^3}{x+4}=\frac{(x+1)}{x+4}\cdot(2x^4-3x+1)^3,$$

y aplicar que el límite de un producto es igual al producto de los límites de los factores,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\,(2x^4-3x+1)^3}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{x+4}\cdot\lim_{x\to+\infty}(2x^4-3x+1)^3$$

Como $\lim_{x\to+\infty}(2x^4-3x+1)^3=\infty$

y $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{4}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}=1\,,$$

entonces, $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\,(2x^4-3x+1)^3}{x+4}=1\cdot\infty=\infty\,.$$

c) Sustituyendo x por ∞ se presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$ (pues el límite de los dos radicandos es ∞). Para resolver esta indeterminación multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada, es decir, por $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1})\,(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1})}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x})^2-(\sqrt{2x^2+1})^2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=$$

(En este último límite se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos dividiendo numerador y denominador por x^2).

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-x^2 - x - 1}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{-x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^4} - \dfrac{x}{x^4}} + \sqrt{\dfrac{2x^2}{x^4} + \dfrac{1}{x^4}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}} + \sqrt{\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}}} = -\infty.$$

d) Al aplicar las propiedades de los límites aparece una indeterminación del tipo 1^{∞} que salvamos reescribiendo la expresión de la función y aplicando las propiedades algebraicas de los límites con la técnica siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x - 6} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x - 6} - 1 \right)^{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x^3 + 3x^2 + 1 - (x^3 + 2x - 6)}{x^3 + 2x - 6} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 2x - 6} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3 + 2x - 6}{3x^2 - 2x + 7}} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x + 2}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3 + 2x - 6}{3x^2 - 2x + 7}} \right)^{\frac{x^3 + 2x - 6}{3x^2 - 2x + 7} \cdot \frac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 2x - 6} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3 + 2x - 6}{3x^2 - 2x + 7}} \right)^{\frac{x^3 + 2x - 6}{3x^2 - 2x + 7}} \right)^{\frac{3x^2 - 2x + 7}{x^3 + 2x - 6} \cdot \frac{x^2 - 1}{x + 2}} =$$

$$= \left[\lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7}} \right)^{\frac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7}} \right) \right]^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2x+7}{x^3+2x-6} \cdot \frac{x^2-1}{x+2}}$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7} = +\infty$ (por ser un cociente de polinomios con grado del numerador mayor que el del denominador), al hacer $t = \dfrac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7}$ se obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7}} \right)^{\frac{x^3+2x-6}{3x^2-2x+7}} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

De esta última igualdad y de las propiedades de los límites se deduce,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3+3x^2+1}{x^3+2x-6} \right)^{\frac{x^2-1}{x+2}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2-2x+7}{x^3+2x-6} \cdot \frac{x^2-1}{x+2} \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^4+\ldots}{x^4+\ldots}} = e^3$$

Problema 9

Sea $f: [0,1] \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = \dfrac{1}{n} \quad n \in \mathbf{N} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

¿Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ para todo $a \in [0,1]$?.

Solución. Si $x_0 \neq \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ y $x_0 \neq 0$, entonces existe un entorno de x_0 en el que la función toma únicamente el valor 1, basta tomar $(x_0 - d, x_0 + d)$ donde,

$$d = \frac{1}{2} \text{máx} \left\{ \left| x_0 - \frac{1}{n} \right|, \left| x_0 - \frac{1}{n+1} \right| \right\} \quad \text{supuesto que} \quad \frac{1}{n+1} < x_0 < \frac{1}{n},$$

luego, existe el límite de esta función en x_0 y vale 1.

Si $x_0=\frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ entonces existe un entorno de x_0 en el que la función toma únicamente el valor 1 salvo en x_0, basta tomar $(x_0\text{-}d, x_0+d)$ donde $d = \frac{1}{2}\text{máx}\left\{\left|x_0-\frac{1}{n+1}\right|, \left|x_0-\frac{1}{n-1}\right|\right\}$ luego, existe el límite de esta función en x_0 y vale 1.

Si $x_0=0$ entonces cualquier entorno de x_0 hay puntos de la sucesión $(\frac{1}{n})$ en los que la función toma el valor - 1 y puntos que no son de esa sucesión en los cuales toma el valor 1, luego, no existe el límite de esta función en $x_0=0$.

Problema 10

Hallar la relación entre los parámetros a y b para que se cumpla la igualdad:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2+1}\right)^{ax^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x-b}\right)^{2x}$$

Solución. Al aplicar las propiedades algebráicas de los límites, ambos límites presentan la indeterminación del tipo 1^{∞}. Los resolvemos con la misma técnica utilizada en el apartado d) del Problema 8. Por un lado,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2+1}\right)^{ax^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x^2+4}{3x^2+1}-1\right)^{ax^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x^2+4-3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{ax^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x^2+1}\right)^{ax^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2+1}{3}}\right)^{\frac{3x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{3x^2+1}\cdot ax^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2+1}{3}}\right)^{\frac{3x^2+1}{3}}\right)^{\frac{3ax^2-3}{3x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3ax^2-3}{3x^2+1}} = e^{a}.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+b}{x-b}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+b}{x-b}-1\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+b-x+b}{x-b}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2b}{x-b}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-b}{2b}}\right)^{\frac{x-b}{2b}\cdot\frac{2b}{x-b}\cdot 2x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4bx}{x-b}} = e^{4b}.$$

Resulta que $e^a = e^{4b}$, de donde se obtiene que $a = 4b$.

Conclusión: La relación entre a y b es $a = 4b$.

TEMA 23

Funciones continuas

Problema 1

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 6 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

Hallar f(3), f(2), $\lim_{x \to 3} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$ y estudiar la continuidad en dichos puntos.

Solución. Los valores que toma la función en $x = 3$ y $x = 2$ son respectivamente $f(3) = 5$ y $f(2) = 6$.

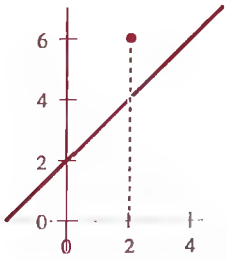
Para valores de x cercanos a 3 (tanto mayores como menores que 3) la expresión de la función es $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, entonces el límite de la función en $x = 3$ es (se halla por simple sustitución):

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-4}{x-2} = 5.$$

Análogamente, al particularizar en $x = 2$, aparece la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Para calcular el límite en dicho punto (como 2 es una raíz tanto del numerador como del denominador) simplificamos :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Conclusión: En $x = 3$ la función es continua pues coinciden el valor del límite y de la función $f(3) = 5 = \lim_{x \to 3} f(x)$, en cambio, en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable pues el límite y el valor de la función no coinciden, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq 6 = f(2)$.



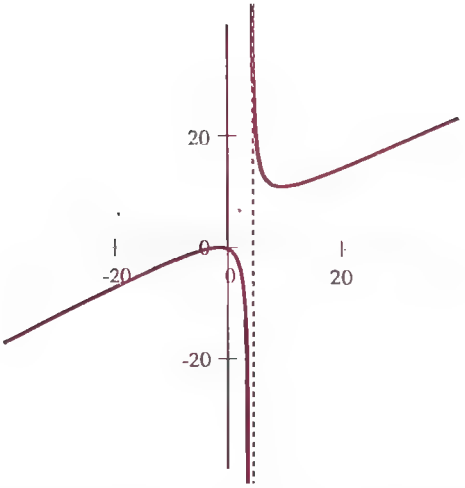
Problema 2

Hallar los puntos en los qué las funciones siguientes presentan discontinuidades:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x^2 - 10x + 8}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Solución. Como consecuencia de las propiedades de los límites referentes a las operaciones aritméticas y de la definición de continuidad en un intervalo, se verifica que la suma, la resta y el producto de funciones continuas en un intervalo es una función continua en ese intervalo, y el cociente también lo es salvo en los puntos que anulen al denominador. De esto se deduce que las funciones polinómicas son continuas en todo **R**.

a) Las funciones racionales (cociente de polinomios como f(x)) están definidas y son continuas en todo **R** menos en los ceros o raíces del denominador. En este caso, f(x) no está definida en los puntos $x = 1$ y $x = 4$, que son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 10x + 8 = 0$, si bien, sí están definidas en un entorno de estos puntos. Así pues estos puntos son puntos de discontinuidad.

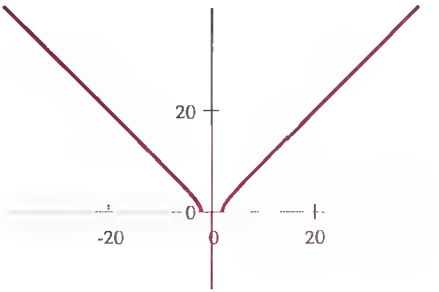


b) Al ser g(x) una función irracional descrita por una raíz de índice par, entonces está

definida y es continua en todo **R** salvo los valores x que hacen negativo el radicando. En este caso, g(x) no está definida en las soluciones de la inecuación de segundo grado:

$$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2.$$

La función g(x) está definida y es continua en **R**-(-2,2), $((-\infty, -2] \cup [2, +\infty))$. En cualquier punto de (-2,2) no está definida la función y por lo tanto no se puede hablar de límite de la función en esos puntos.



Problema 3

Hallar el valor de la constante c para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ c & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

sea continua en x = 1.

Solución. Para que sea continua la función en $x = 1$ debe cumplirse la condición,

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Como $f(1) = c$, calculamos $\lim_{x \to 1} f(x)$,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}; \left(\frac{0}{0}\right),$$

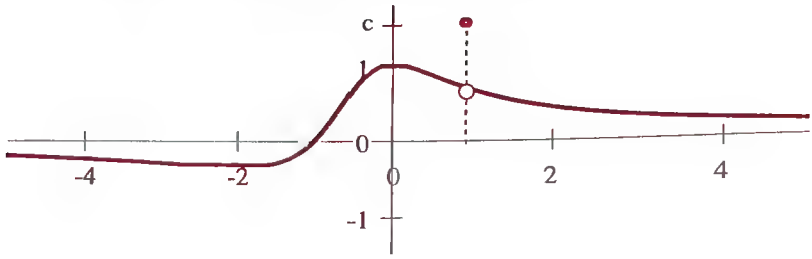
(al aplicar las propiedades algebraicas aparece una indeterminación que resolvemos descomponiendo numerador y denominador por Ruffini).

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

por tanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Conclusión: La constante c debe valer $\frac{2}{3}$ para que f(x) sea continua.



Problema 4

Sea D un subconjunto de **R**, estudiar la continuidad de las funciones $f: D \to \mathbf{R}$ definidas por

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{x}{x^2 + x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Solución. Para estudiar la continuidad de una función definida a intervalos se debe estudiar la continuidad en cada intervalo y la continuidad en los puntos donde cambia de expresión.

a) Estudiamos primero la continuidad de la función en aquellos intervalos abiertos donde está definida por una única expresión.

En $(-\infty,0)$, la expresión de f es $f(x) = x^2 + 2x$, como es una función polinómica entonces es continua en dicho intervalo.

En $(0,2)$, la expresión de f es $f(x) = \frac{x}{2}$, es también polinómica, luego f(x) es continua en el intervalo $(0,2)$.

En $(2,\infty)$, la expresión de f es $f(x) = \frac{x}{x-1}$, como la función es un cociente de dos polinomios sólo es discontinua en los puntos donde se anule el denominador. Como $x - 1 = 0$ para $x = 1$ y este punto no está en $(2,\infty)$, entonces f es continua en dicho intervalo.

Seguidamente se estudia la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ analizando los límites laterales pues la función tiene diferente expresión a cada lado de estos puntos.

En $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} = 0,$$

los límites laterales coinciden, luego el límite vale 0. La función es continua en $x = 0$ pues

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0 .$$

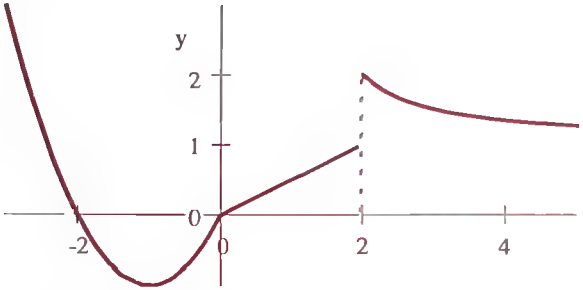
En $x = 2$,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{2} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2,$$

luego la función no es continua en $x = 2$ pues no existe límite debido a que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Conclusión: La función f es continua en $\mathbf{R} - \{2\}$.



b) Análogamente, estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos.

En $(-\infty,0)$ la expresión de f es $f(x) = \sqrt{x+1}$, al ser raíz de índice par no está definida en los puntos que hagan negativo el radicando, $x + 1 < 0$; $x < -1$. La función es continua en el intervalo $[-1, 0)$.

En $(0,\infty)$, la expresión de f es $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$, que al ser un cociente de polinomios será discontinua en los puntos que anulen el denominador. Las raíces del denominador son $x = 0$ y $x = -1$, que no pertenecen al intervalo $(0,\infty)$. Por tanto, f es continua en $(0,\infty)$.

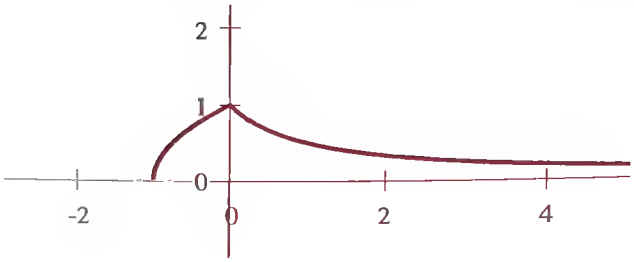
En $x = 0$ se tiene que $f(0) = 1$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{x+1} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 .$$

Como los límites coinciden y son iguales, entonces existe el límite que es igual a f(0). La función es continua en $x = 0$.

Conclusión: La función es continua en $[-1,0)\cup[0,\infty) = [-1,\infty)$.



Problema 5

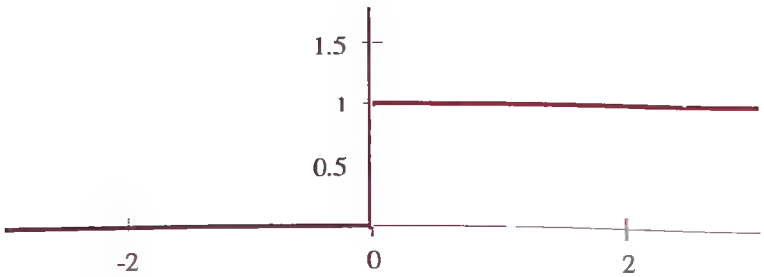
Estudiar la continuidad de las funciones reales variable real f, g y $g\circ f$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución. La función f es constante en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$, luego es continua en $(-\infty,0)$ y en $(0,\infty)$, pero

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

por tanto, f no es continua en $x = 0$.



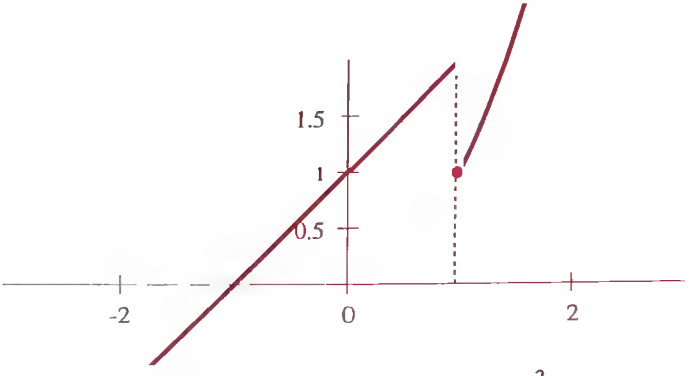
La función $g(x)$ es polinómica en $(-\infty,1)$ y en $(1,\infty)$, luego es continua en $(-\infty,1)$ y en $(1,\infty)$. Además, en $x = 1$ se tiene $g(1) = 1^2 = 1$,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 1+1 = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1^2 = 1,$$

luego no es continua en $x = 1$.

La función $g\circ f$ está definida por: $g\circ f(x) = g(f(x)) = 1$, puesto que

$$\text{si } x \le 0, \text{ entonces } g\circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0+1 = 1,$$



si $x>0$, entonces $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(1) = 1^2 = 1$,

y es continua en $\mathbf{R}$ por ser una función constante.

Conclusión: La función f es continua en $\mathbf{R} - \{0\}$, la función g en $\mathbf{R} - \{1\}$ y la función compuesta $g\circ f$ en $\mathbf{R}$.

Problema 6

Probar que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ tiene inversa creciente y continua. Determinar dicha función inversa.

Solución. La función f está bien definida en $(0,+\infty)$ pues el denominador no se anula en dicho intervalo. Para probar que tiene inversa creciente y continua aplicamos el siguiente resultado:

"Si f es continua y creciente en un intervalo I entonces f^{-1} es continua y creciente en f(I)".

Comprobemos que f es continua y creciente en $(0,\infty)$.

La función f es continua en $(0,\infty)$ por ser un cociente de polinomios en el que el denominador no se anula en $(0,\infty)$.

La función f es creciente en $(0,\infty)$, es decir, $f(x) < f(y)$ para todo $x < y$, pues

$$f(y) - f(x) = \frac{y}{y+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} > \frac{y-x}{(y+1)^2} > 0.$$

Por tanto, f^{-1} es creciente y continua en $(0,\infty)$. Determinamos dicha función inversa.

Como $f(x) = y = \dfrac{x}{x+1}$ poniendo $f^{-1}(y) = x$ queda definida la función

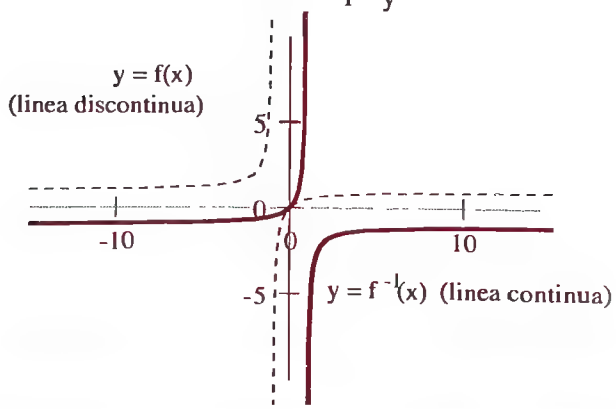
$$f^{-1} : f((0,\infty)) \to (0,\infty) \ ; \ y = \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}(y)+1}$$

que es la función inversa de f. Así pues, despejamos $f^{-1}(y)$:

$$y f^{-1}(y) + y = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f^{-1}(y) - y(f^{-1}y) \Rightarrow y = f^{-1}(y)(1-y)$$

lo que implica

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}.$$



Problema 7

Utilizar la identidad $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ y el hecho de que la función raíz cúbica es una función continua en $\mathbf{R}$ para calcular

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[3]{x^3+1}\right).$$

Solución. Al sustituir x por $+\infty$ resulta la indeterminación $\infty - \infty$, utilizamos la identidad del enunciado para resolverla. Supuesto que a - b es $\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[3]{x^3+1}$ reescribimos

$\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}$ como $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$, es decir,

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^3-(\sqrt[3]{x^3+1})^3}{(\sqrt[3]{x^3+3x^2})^2+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)(x^3+1)}+(\sqrt[3]{x^3+1})^2}=$$

$$=\frac{x^3+3x^2-x^3-1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)(x^3+1)}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$$

Al sustituir en ésta última expresión x por $+\infty$, aparece la indeterminación $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ que resolvemos dividiendo por x^2 (potencia mayor de x) el numerador y denominador, de donde

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+3x^2)(x^3+1)}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

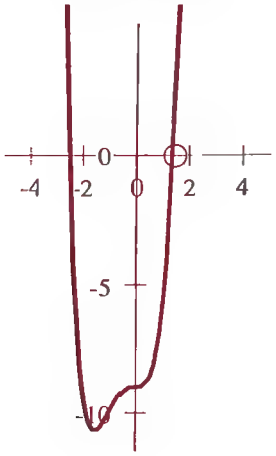
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^6}{x^6}+\ldots}+\sqrt[3]{\dfrac{x^6}{x^6}+\ldots}+\sqrt[3]{\dfrac{x^6}{x^6}+\ldots}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}=\frac{3}{3}=1$$

Problema 8

Probar que la ecuación $x^4+2x^3-9=0$ tiene una solución en $[0,2]$.

Solución. La función polinómica $f(x)=x^4+2x^3-9$ es continua en el intervalo $[0,2]$, además, $f(0)=-9<0$ y $f(2)=23>0$. La función f verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano, luego existe al menos un $x_0\in(0,2)$ tal que $f(x_0)=0$.

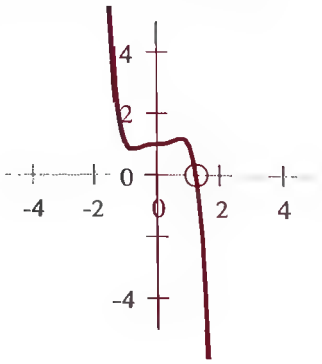
Conclusión: El punto $x_0\in(0,2)$ es una solución de la ecuación pedida.



Problema 9

Demostrar que la función $f(x) = 1 + x^3 - x^5$ tiene al menos una raíz real.

Solución. Por ser f(x) una función polinómica es continua en **R**, además, $f(0) = 1$ y $f(3) = -215$, luego f verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [0,3]. Así pues, podemos asegurar que existe $x_0 \in (0,3)$ tal que $f(x_0) = 0$.



Problema 10

Estudiar la continuidad de la función f definida en [0,1] por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 1 + x & \text{si} \quad x \in [0,1] - \mathbf{Q} \end{cases}$$

Solución. Si f está definida en un entorno de x_0, f es continua en x_0 si se verifica que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Pero en todo entorno de $x_0 \in [0,1]$ hay números racionales y números irracionales. Por tanto, si f es continua en x_0 ha de verificarse que

$$\lim_{x \to x_0} (2 - x) = \lim_{x \to x_0} (1 + x) \Rightarrow 2 - x_0 = 1 + x_0 \Rightarrow 1 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Luego, sólo puede ser continua en $x_0 = \frac{1}{2}$. Veamos que f es continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Dado $\varepsilon > 0$ encontraremos un $\delta > 0$ tal que si $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $\left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| < \varepsilon$.

$$\left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| = \left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \left\{\begin{array}{l} \left|2 - x - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - x\right| \\ \left|1 + x - \frac{3}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \end{array}\right\} = \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta.$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon$, y tenemos que si $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| < \varepsilon$.

Conclusión: f no es continua en $\mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ y f es continua en $\frac{1}{2}$.

TEMA 24

Funciones derivables

Problema 1

Aplicar la definición de derivada para calcular, en el punto $x = 2$, la derivada de las funciones:

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = \dfrac{1}{2x}$

c) $p(x) = \sqrt{x}$ d) $q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Solución. La derivada de una función f en un punto a viene dada por la expresión

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a) Calculamos:

$$f(2) = 2^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2 .$$

$$f(2+h) - f(2) = 4 + 4h + h^2 - 4 = 4h + h^2 .$$

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h .$$

Luego, $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4$, es decir, $f'(2) = 4$.

b) Calculamos:

$$g(2) = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad g(2+h) = \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4+2h} .$$

$$g(2+h)-g(2) = \frac{1}{4+2h}-\frac{1}{4} = -\frac{h}{8+4h}.$$

$$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{-\frac{h}{8+4h}}{h} = -\frac{1}{8+4h}.$$

Luego, $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}-\frac{1}{8+4h} = -\frac{1}{8}$, es decir, $g'(2) = -\frac{1}{8}$.

c) Análogamente,

$$p(2) = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad p(2+h) = \sqrt{2+h}.$$

$$p(2+h)-p(2) = \sqrt{2+h}-\sqrt{2}.$$

$$\frac{p(2+h)-p(2)}{h} = \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}.$$

Luego, $\lim_{h\to 0}\frac{p(2+h)-p(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ (se presenta indeterminación $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ es decir, } p'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

d) Análogamente,

$$q(2) = 3\cdot 2^2-(2\cdot 2)+1 = 9.$$

$$q(2+h) = 3(2+h)^2-2(2+h)+1 = 3h^2+10h+9.$$

$$q(2+h)-q(2) = 3h^2+10h.$$

$$\frac{q(2+h)-q(2)}{h} = \frac{3h^2+10h}{h} = 3h+10.$$

Luego, $\lim_{h\to 0}\frac{q(2+h)-q(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+10) = 10$, es decir, $q'(2) = 10$.

Problema 2

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución. En cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$ la función f tiene una expresión polinómica, por tanto, es continua. Veamos si f es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \ , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x - 1 = 2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2.$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, entonces f también es continua en $x = 1$.

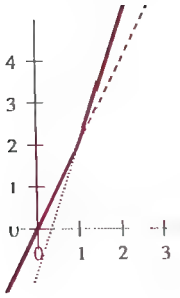
Como en cada uno de los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$ la función f tiene una expresión polinómica, entonces es derivable. En $x = 1$ la función f será derivable si las derivadas laterales en 1 existen y son iguales.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(1+h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2 .$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(3(1+h) - 1) - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h}{h} = 3 .$$

Por ser $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, la función f no es derivable en $x = 1$.

Conclusión: La función es continua en $\mathbf{R}$ y derivable en $\mathbf{R} - \{1\}$.



Problema 3

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

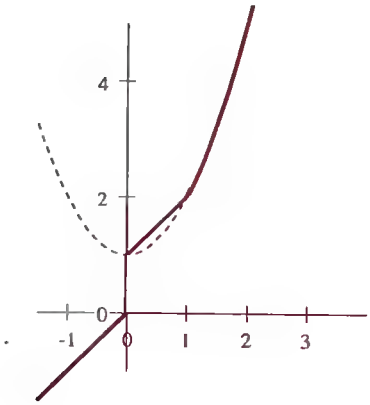
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} .$$

Solución. Por tener f una expresión polinómica en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, entonces f es continua en cada uno de dichos intervalos.

Veamos que ocurre en $x = 0$ y $x = 1$. En $x = 0$ se tiene,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

Por ser $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces la función f no es continua en $x = 0$.



En $x = 1$ se tiene,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2+1) = 2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2.$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, entonces f es continua en $x = 1$

Por tener f una expresión polinómica en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, entonces f es derivable en cada uno de dichos intervalos.

En $x = 0$ la función no es continua, luego no puede ser derivable y en $x = 1$ se tiene,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1+h+1-2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1 ,$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} (2+h) = 2 .$$

Por ser $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, la función f no es derivable en $x = 1$.

Conclusión: La función es continua en $\mathbf{R} - \{0\}$ y derivable en $\mathbf{R} - \{0,1\}$.

Problema 4

Determinar las constantes a y b para que sea derivable en $x = 0$ la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución. Si la función f es derivable en $x = 0$ entonces f es continua en $x = 0$, es decir, se verifica que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$. Como $f(0) = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ax + b = b$, resulta que $b = 0$.

Si la función f es derivable en $x = 0$, entonces las derivadas laterales existen y coinciden, es decir, se verifica que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Como $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0,$$

y $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a(0+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{ah}{h} = a,$$

entonces $a = 0$.

Conclusión: Para que f sea derivable en $x = 0$ debe verificarse $a = b = 0$.

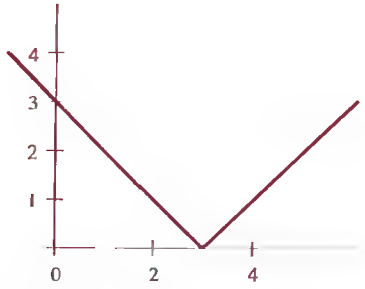
Problema 5

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x - 3|$

Solución. La función f se puede expresar de la forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

pues si $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0$, entonces $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$, y si $x \geq 3 \Rightarrow x - 3 \geq 0$, entonces $|x - 3| = x - 3$.



Por ser f una función polinómica en los intervalos $(-\infty, 3)$ y $(3, +\infty)$, entonces f es continua y derivable en dichos intervalos. Veamos que ocurre en $x = 3$. Por ser,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 3 - x = 0 \ , \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0 \ , \quad f(3) = 0 \ ,$$

y $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = 0$, resulta que f es continua en $x = 3$

Además,

$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(3 - (3+h)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \ .$$

$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{((3+h) - 3) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \ .$$

Por ser $f'(3^-) \neq f'(3^+)$, la función f no es derivable en $x = 3$.

Problema 6

Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ si $x \neq -1$

c) $h(x) = x^{1/2} + x^{1/3}$ si $x > 0$

d) $k(x) = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$ si $x > 0$

e) $p(x) = x\sqrt{1 + x^2}$

f) $q(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ si $-1 < x < 1$

Solución. Aplicamos las reglas de derivación para determinar la función derivada.

a) $f'(x) = 2x + 1$ (aplicamos la derivada de una suma y la derivada de una potencia).

b) $g'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ (aplicamos la derivada de un cociente).

c) $h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (aplicamos la derivada de una suma y la de una potencia).

d) $k'(x) = \dfrac{1\cdot(1+\sqrt{x}) - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \dfrac{1+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$ (aplicamos la derivada de un cociente y de la raíz cuadrada).

e) $p'(x) = 1\cdot\sqrt{1+x^2} + x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

(aplicamos la derivada de un producto y la derivada de una raíz).

f) $q'(x) = \dfrac{1\cdot\sqrt{1-x^2} - x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ (aplicamos la derivada de un cociente y la derivada de una raiz).

Problema 7

Calcular en $x = 0$ la derivada primera y la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ b) $g(x) = x\sqrt{9-x^2}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+2}$ d) $k(x) = \dfrac{3x^2+5}{(x-1)(x-2)}$

Solución. Aplicamos las reglas de derivación para determinar la expresión de la función derivada primera , simplificamos la expresión de esta función derivada primera y aplicamos nuevamente las reglas de derivación con la función derivada primera para obtener la función derivada segunda.

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -(1+x)^{-3/2}(1-x)^{-1/2}$.

$f''(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{-5/2}(1-x)^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}(1-x)^{-3/2}$.

Al sustituir x por 0 en estas funciones se tiene: $f'(0) = -1$ y $f''(0) = 1$.

b) $g'(x) = 1 \cdot \sqrt{9-x^2} + x \cdot \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$.

$$g''(x) = \frac{((-4x)\sqrt{9-x^2}) - \left(\dfrac{-2x\,(9-2x^2)}{2\sqrt{9-x^2}}\right)}{(\sqrt{9-x^2})^2} = \frac{2x^3-27x}{(9-x^2)^{3/2}}.$$

Por tanto, $g'(0) = 3$ y $g''(0) = 0$.

c) Antes de derivar reescribimos la expresión de la función como una potencia.

$$h(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+2} = (x^2+2x+2)^{1/3}.$$

$$h'(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x+2)^{-2/3}(2x+2).$$

$$h''(x) = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(x^2+2x+2)^{-5/3}(2x+2)^2 + (x^2+2x+2)^{-2/3}\cdot 2\right].$$

Por tanto, $h'(0) = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$ y $h''(0) = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{9}$.

d) $$k'(x) = \frac{6x(x-1)(x-2) - (3x^2+5)[(x-2)+(x-1)]}{[(x-1)(x-2)]^2} = \frac{-9x^2+2x+15}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$k''(x) = \frac{(-18x+2)(x-1)^2(x-2)^2 - (-9x^2+2x+15)[2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^2]}{(x-1)^4(x-2)^4} =$$

$$= \frac{18x^3-6x^2-90x+94}{(x-1)^3(x-2)^3}.$$ Por tanto, $k'(0) = \dfrac{15}{4}$ y $k''(0) = \dfrac{47}{4}$.

Problema 8

Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, con $x \neq -1$.

Solución. Derivamos una y otra vez hasta obtener una ley que describa la expresión de cada función derivada sucesiva. Inicialmente reescribimos la expresión de la función como una potencia.

$f(x) = (x+1)^{-2}$, con $x \neq -1$

$f'(x) = (-2)\cdot(x+1)^{-3} = (-1)\cdot 2\cdot(x+1)^{-3}$, con $x \neq -1$.

$f''(x) = (-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(x+1)^{-4} = (-1)^2\cdot 2\cdot 3\cdot(x+1)^{-4}$, con $x \neq -1$.

$$f'''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (x+1)^{-5} = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x+1)^{-5} \quad , x \neq -1 .$$

$$f^{(4)} = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (x+1)^{-6} \quad , \text{con } x \neq -1$$

....

$$f^{(n)} = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot .... \cdot (n+1)\,(x+1)^{-(n+2)} = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} \quad \text{con } x \neq -1 .$$

Problema 9

Determinar la función derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Solución. Inicialmente se debe determinar el dominio de definición de la función derivada, es decir, el conjunto donde f es una función derivable. Para ello, primeramente se estudia el conjunto donde la función es continua.

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la aplicación es continua por ser el cociente de una función constante y una función polinómica que no se anula en dicho intervalo y en cada uno de los intervalos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, la función f es continua por ser una función polinómica en dichos intervalos. Por análogas razones esta función es derivable en cada uno de estos intervalos abiertos.

Estudiamos si f es continua en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

En $x = -1$ se tiene, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x} = -1$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1$,

y al ser $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, entonces la función f no es continua en $x = -1$.

En $x = 0$ se tiene, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0$,

además, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, luego la función f es continua en $x = 0$.

En $x = 1$ se tiene, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^3 = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$,

y por ser $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$, entonces la función f es continua en $x = 1$.

Estudiamos si f es derivable en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = -1$ la función no es derivable puesto que no es continua.

En el punto $x = 0$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0,$$

y al coincidir las derivadas laterales de la función f, entonces f es derivable en $x=0$.

Estudiamos si f es derivable en el punto $x = 1$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^3-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h^2+3h+3) = 3,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h+2) = 2.$$

Como $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$, entonces la función f no es derivable en $x = 1$.

La función derivada es (en cada abierto se aplican las reglas de derivación),

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x & \text{si} \quad -1<x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 2x & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

Problema 10

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, definida en el intervalo $[-1,1]$, en el punto de tangencia $(0,1)$. Igualmente en el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Solución. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de tangencia $(a,f(a))$ viene dada por la expresión $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Calculamos inicialmente la función derivada $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, y posteriormente la derivada de la función en el punto $x = 0$, $f'(0) = 0$.

Luego, la recta tangente en $(0,1)$ es $y - 1 = 0 \cdot (x - 0)$, es decir $y = 1$.

Análogamente, $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = -1$ y la ecuación de la recta tangente en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es $y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (-1) \cdot \left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, o bien $x + y - \sqrt{2} = 0$.

Problema 11

¿ En que punto de la gráfica se verifica que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

Solución. Al ser $f'(x) = 2x - 7$ y supuesto que $(a, f(a))$ es el punto buscado, entonces la ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, es decir,

$$y - (a^2 - 7a + 3) = (2a - 7)(x - a),$$

$$(2a - 7)x - y - a(2a - 7) + (a^2 - 7a + 3) = 0.$$

- Una forma de resolver este problema.

La pendiente de una recta viene dada por el coeficiente de la x despejada la y. En el caso de la recta $5x + y - 3 = 0$, o bien $y = -5x + 3$, se tiene que su pendiente es -5.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto x es la derivada de la función f en el punto x, $f'(x) = 2x - 7$. Luego, la pendiente, en el punto a, de la recta tangente es $f'(a) = 2a - 7$.

Si las rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales. Así pues, resulta que

$$2a - 7 = -5 \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1,$$

y, por lo tanto, $f(1) = -3$.

- Otra forma de resolver este problema.

Un vector de dirección de la recta tangente es $(1, 2a - 7)$ (vector de primera coordenada el coeficiente de y con el signo cambiado y de segunda coordenada el coeficiente de x).

Análogamente, un vector de dirección de la recta $5x + y - 3 = 0$ es $(-1,5)$.

Si las rectas son paralelas, entonces los vectores de dirección son proporcionales. Luego, $(1, 2a-7) = m(-1,5)$, de donde se obtiene el sistema (al igualar coordenada a coordenada)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= -m \\ 2a-7 &= 5m \end{aligned}\right\}, \text{ de solución } \quad m = -1 \quad y \quad a = 1 .$$

Si $a = 1$, entonces $f(1) = -3$ y el punto buscado es $(1,-3)$.

Conclusión: El punto pedido es $(1,-3)$.

Problema 12

El espacio $f(t)$, medido en metros, recorrido por una partícula sobre una recta al cabo de t segundos viene dado por $f(t) = 100 + 5t - 0{,}001\,t^3$. Hallar la velocidad y la aceleración de dicha partícula en los instantes $t = 1$ y $t = 10$.

Solución. La función derivada de la función espacio, $f(t)$, es la función velocidad,

$$v(t) = f'(t) = 5 - 0{,}003\,t^2 .$$

La función derivada de la función velocidad, $v(t)$, es la función aceleración,

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = -0{,}006\,t .$$

Así pues, en los instantes $t = 1$ y $t = 10$ se tienen,

$$v(1) = 5 - 0{,}003 = 4{,}997 \; ; \; a(1) = -0{,}006 ,$$

y

$$v(10) = 5 - 0{,}3 = 4{,}7 \; ; \; a(10) = -0{,}06 .$$

TEMA 25

Estudio y representación de funciones.

Problema 1

Aplicar la regla de l'Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$ b) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

Solución.

a) Este límite presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ (al aplicar las propiedades algebráicas de los límites de funciones, o como suele decirse, al sustituir x por 1 en el numerador y el denominador). En este caso se puede aplicar la regla de l'Hôpital (sólo para funciones derivables) y resulta que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{3x^2-2x-1}.$$

En este último límite vuelve a quedar la misma indeterminación $\dfrac{0}{0}$ (al sustituir x por 1 dentro del límite). Esta se salva aplicando nuevamente la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{3x^2-2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{6x-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) En este límite también aparece (al sustituir x por 1 dentro del límite) la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que se salva aplicando la regla de l'Hôpital (pues se trata de funciones derivables) y resulta que

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}}{x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x+1}}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

c) Igualmente se presenta la anterior indeterminación y procedemos de análoga forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}=1\,.$$

Problema 2

Aplicar el Teorema del Valor Medio para calcular $\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)^{2/3}-x^{2/3}\right)$.

Solución. Consideremos la función $f(t)=t^{2/3}$, que es continua en cualquier intervalo $[x\,,\,x+1]$ y derivable en $(x\,,\,x+1)$ para todo $x>0$. Si se aplica el Teorema del Valor Medio, resulta que existe $c_x\in(x\,,\,x+1)$ tal que

$$f'(c_x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=(x+1)^{2/3}-x^{2/3}.$$

$$f'(t)=\frac{2}{3}t^{-1/3}\Rightarrow f'(c_x)=\frac{2}{3}(c_x)^{-1/3}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{c_x}}\Rightarrow(x+1)^{2/3}-x^{2/3}=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{c_x}}.$$

Además, como $x<c_x<x+1$, resulta que si $x\to+\infty$ entonces $c_x\to+\infty$, por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)^{2/3}-x^{2/3}\right]=\lim_{c_x\to+\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{c_x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{+\infty}=0\,.$$

Problema 3

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=-x^4+2x^2$.

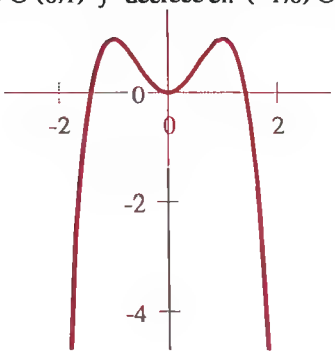
Solución. Por ser f una función derivable en $\mathbf{R}$, calculamos f' y estudiamos su signo.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = -4x(x+1)(x-1).$$

Evidentemente, $f'(x) = 0$ para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. Estudiamos el signo de $f'(x)$

	-4	$x-1$	x	$x+1$	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty,-1)$	-				+	creciente
$x \in (-1,0)$		-	-	+	-	decreciente
$x \in (0,1)$	-	-	+	+	+	creciente
$x \in (1,+\infty)$	-	+	+	+	-	decreciente

Luego, f crece en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ y decrece en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$.



Problema 4

Determinar el valor máximo y el valor mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en $[0,4]$ b) $g(x) = x^3 + 3x - 7$ en $[-1,1]$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0,2]$

Solución. El valor máximo absoluto de una función continua sobre un intervalo cerrado (existe por el Teorema de Weiertrass) se alcanza en un máximo relativo o en uno de los extremos del intervalo. Análogamente, con los valores mínimos absolutos.

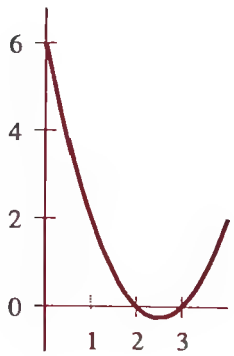
a) La función f es continua y varias veces derivable en $\mathbf{R}$ (por ser una función polinómica).

Estudiemos los máximos y mínimos relativos de f, aplicando los resultados conocidos para funciones derivables, para lo cual buscamos lo valores que anulan a la primera derivada, $f'(x) = 2x - 5$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$, que pertenece al intervalo $[0, 4]$.

Además, como $f''(x) = 2 > 0$, entonces la función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{5}{2}$, por tanto, los valores máximos y mínimos se alcanzan en el conjunto $\{0, \frac{5}{2}, 4\}$

Como $f(0) = 6$; $f(\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$ y $f(4) = 2$, entonces el valor máximo es $f(0) = 6$ y el valor mínimo $f(\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$.



b) La función g es continua y varias veces derivable en $[-1, 1]$. Estudiemos los máximos y mínimos relativos de g.

$$g'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow g'(x) \geq 3 > 0 \text{ para todo } x \in [-1, 1],$$

luego, la función g es creciente en $[-1, 1]$ y no tiene máximos y mínimos relativos. Los valores $g(-1) = -11$ y $g(1) = -3$ son, respectivamente, los valores mínimo y máximo absolutos de la función g en el intervalo $[-1, 1]$.

c) La función h está definida (pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x), es continua y derivable en $[0, 2]$.

$$h'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

Buscamos los valores que anulan a la primera derivada,

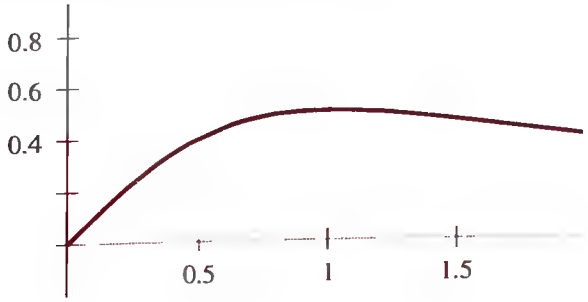
$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \\ x = 1 \end{cases},$$

pero solo $x = 1$ pertenece al intervalo $[0, 2]$. Estudiamos el valor de la segunda derivada,

$$h''(x) = \frac{(-2x(x^2+1)^2) - (2(x^2+1)\cdot 2x(-x^2+1))}{(x^2+1)^4}.$$

Como $h''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, la función h tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Los valores máximo y mínimo absolutos de h se alcanzan en el conjunto $\{0, 1, 2\}$ y, además, $h(0) = 0$, $h(1) = \frac{1}{2}$ y $h(2) = \frac{2}{5}$. Luego, el valor máximo absoluto es $h(1) = \frac{1}{2}$ y el valor mínimo absoluto es $h(0) = 0$.



Problema 5

Estudiar los máximos y mínimos relativos de las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ b) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x$

Solución. Las dos funciones son derivables varias veces y aplicaremos dos resultados relativos a funciones derivables que ilustren dos formas distintas de resolver el problema.

a) Los posibles puntos donde la función alcanza un máximo o mínimo relativo verifican la condición $f'(x) = 0$. Así pues,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

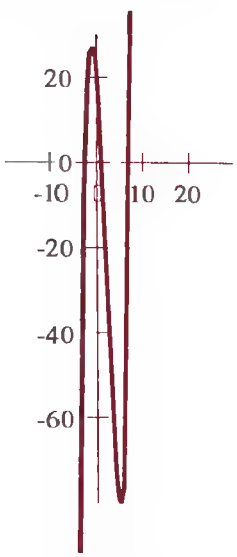
Estudiamos el signo de $f'(x)$ para averiguar si la función f tiene máximo o mínimo en $x = -1$ y $x = 5$. Obsérvese que $f'(x) = 3(x+1)(x-5)$.

	$x+1$	$x-5$	$f'(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty,-1)$	-	-	+	creciente
$x \in (-1,5)$	+	-	-	decreciente
$x \in (5,+\infty)$	+	+	+	creciente

Como a la izquierda de $x = -1$, f es creciente y a la derecha decreciente, entonces la función tiene un máximo relativo en $x = -1$.

Como a la izquierda de $x = 5$, f es decreciente y a la derecha creciente, entonces la función posee un mínimo relativo en $x = 5$.

Conclusión: En el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 28)$ hay el máximo relativo de f y en el punto $(5, f(5)) = (5, -80)$ hay el mínimo relativo de f.



b) Buscamos los puntos donde se anula la función derivada, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 10$.

$$5x^4 - 15x^2 + 10 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 15t + 10 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ +1 \\ -1 \end{cases}.$$

Ahora, calculamos $f''(x)$, $f''(x) = 20x^3 - 30x$ y estudiamos el signo de $f''(x)$ en los puntos donde se anula $f'(x)$; $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = 1$ y $x_4 = -1$,

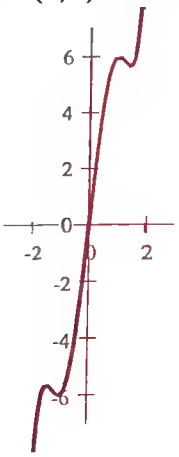
$f''(\sqrt{2}) = 40\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 10\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ existe mínimo relativo en $x_1 = \sqrt{2}$.

$f''(-\sqrt{2}) = -40\sqrt{2} + 30\sqrt{2} = -10\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ existe máximo relativo en $x_2 = -\sqrt{2}$.

$f''(1) = -10 < 0 \Rightarrow$ existe máximo relativo en $x_3 = 1$.

$f''(-1) = 10 > 0 \Rightarrow$ existe mínimo relativo en $x_4 = -1$.

Conclusión: En el punto $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ hay un mínimo relativo y en $(-1, f(-1)) = (-1, -6)$ otro. En el punto $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ hay un máximo relativo y en $(1, f(1)) = (1, 6)$ otro.

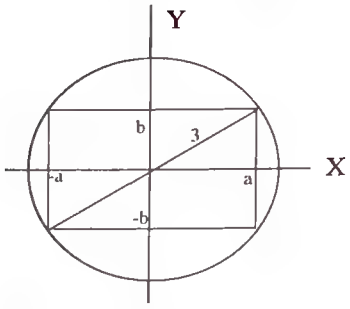


Problema 6

Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

Solución. Consideramos rectángulos de lados paralelos a los ejes únicamente pues el problema no pierde generalidad. Sea un rectángulo cualquiera cuyos lados miden 2a (los lados paralelos al eje de las X) y 2b (los lados paralelos al eje Y). Cualquier triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia verifica que su hipotenusa es un diámetro, entonces $a^2 + b^2 = 3^2$ (por el Teorema

de Pitágoras) y resulta que $b^2 = 9 - a^2$ siendo $a \in [0, 3]$ (es decir $0 < a < 3$).

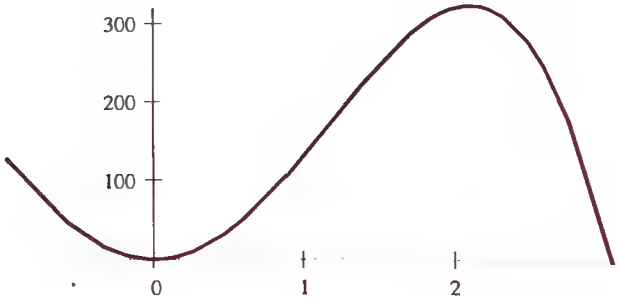


El área de dicho rectángulo es $S(a) = 2a \cdot 2b = 4ab$.

Como el área es un número positivo, entonces ésta es máxima si y sólo si su cuadrado lo es, es decir, $S^2(a) = 16a^2b^2$ es máxima. Además, al sustituir b^2 por su valor obtenido en función de a^2 queda la expresión del cuadrado del área como función de a, $S^2(a) = 16a^2(9 - a^2)$. Esta función es derivable en la variable a y podemos aplicar los resultados correspondientes a máximos y mínimos relativos para funciones derivables, para determinar para que valor de a se hace máxima.

Sea la función $f(a) = 16a^2(9 - a^2) = 144a^2 - 16a^4$ definida únicamente en $[0, 3]$.

Determinamos los valores donde se anula la función derivada $f'(a) = 288a - 64a^3$,



$$f'(a) = 0 \Rightarrow 288a - 64a^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 = \dfrac{288}{64} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases},$$

y sólo los valores $a = 0$ y $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ están contenidos en [0,3].

Calculamos el valor de la derivada segunda, $f''(a) = 288 - 192a^2$, para cada uno de estos valores de a,

$$f''(0) = 288 > 0 \quad \Rightarrow \text{ f posee un mínimo relativo en } a = 0.$$

$$f''\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -576 < 0 \Rightarrow \text{ f posee un máximo relativo en } a = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Luego, el máximo pedido se alcanza para $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{9 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Conclusión: El rectángulo de área máxima será un cuadrado de lado $2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ cm.

Problema 7

Hallar a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P = (8, 0)$ y tenga un mínimo en $Q = (6, -12)$.

Solución. Que la función pase por los puntos P y Q significa que las coordenadas del punto verifican la expresión de la función, es decir, que $f(8) = 0$ y $f(6) = -12$,

$$a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0 \quad \text{y} \quad a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = -12.$$

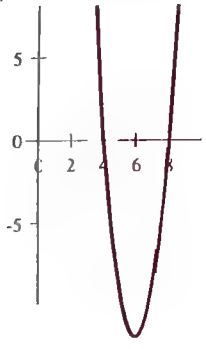
Al ser f derivable y tener un mínimo en Q, resulta que $f'(x)$ se anula en $x = 6$,

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(6) = 2 \cdot 6 \cdot a + b = 0.$$

Luego, tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\}, \text{ de solución, } a = 3,\ b = -36 \text{ y } c = 96.$$

Por tanto, la función es $f(x) = 3x^2 - 36x + 96$.



Problema 8

Estudiar si las siguientes funciones poseen alguna simetría.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + 5}$

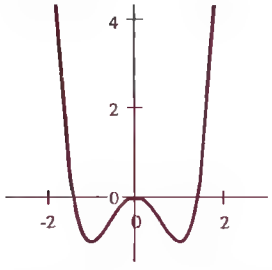
c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3}{x^2 - 2}$

d) $f(x) = |2x^5|$

Solución. Si para cualquier x se verifica que $f(-x) = f(x)$, entonces f es simétrica respecto al eje Y (f es par). Si $f(-x) = -f(x)$ entonces f es simétrica respecto al origen de coordenadas (f es impar).

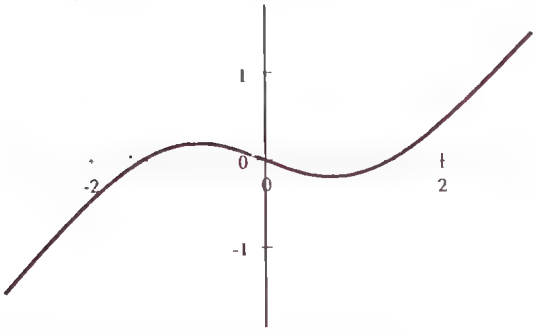
a) f es simétrica respecto al eje Y, puesto que

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x).$$



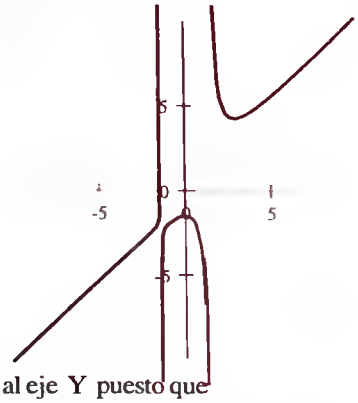
b) f es simétrica respecto al origen de coordenadas, puesto que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 + 5} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2 + 5} = -\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 5} = -f(x).$$



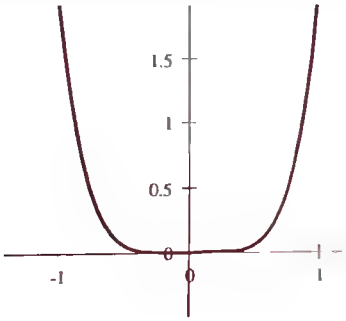
c) Esta función no presenta ningún tipo de simetría, pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3}{(-x)^2 - 2} = \frac{-x^3 + 3}{x^2 - 2} = -\frac{x^3 - 3}{x^2 - 2}$$ y es distinto de $f(x)$ y de $-f(x)$.



d) f es simétrica respecto al eje Y puesto que

$$f(-x) = |2(-x)^5| = |-2x^5| = |2x^5| = f(x).$$



Problema 9

Estudiar la existencia de rectas asíntotas para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$ b) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$ c) $f(x) = \dfrac{-3x^2+x}{2x+6}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{2x^3-4x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$

Solución.

a) Para estudiar las asíntotas horizontales se estudia el valor de los límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+2}{x-4} = 3 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+2}{x-4} = 3,$$

luego, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de la función f por ambos lados.

La situación de la función respecto a la asíntota se determina estudiando el signo de

$$f(x) - 3 = \frac{3x+2}{x-4} - 3 = \frac{3x+2-3x+12}{x-4} = \frac{14}{x-4}.$$

Si $x \to +\infty$, entonces $f(x) - 3 > 0$, luego, la función queda por encima de la asíntota.

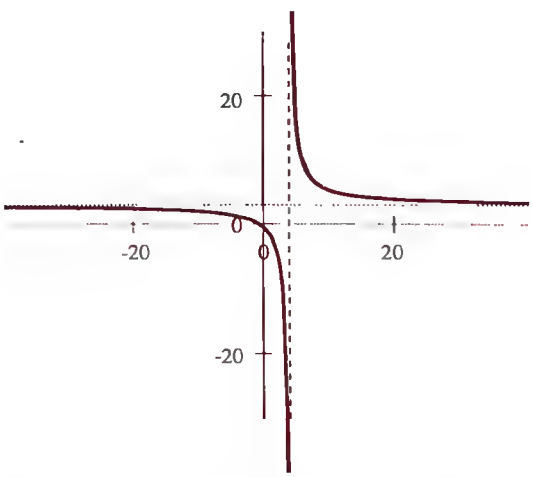
Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) - 3 < 0$, luego, la función queda por debajo de la asíntota.

En los puntos donde existen rectas asíntotas verticales se anula el denominador de la fracción que define a la función. En este caso, el denominador sólo se anula para $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{3x+2}{x-4} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{3x+2}{x-4} = +\infty,$$

luego $x = 4$ es una recta asíntota vertical.

Como existen rectas asíntotas horizontales por los dos lados, entonces no existen asíntotas oblicuas.



b) Para estudiar la existencia de rectas asíntota horizontal calculamos los límites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x^2-4} = 0 \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{x^2-4} = 0,$$

luego, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función f.

Estudiemos la situación de la función respecto a la asíntota determinando el signo de

$$f(x) - 0 = \frac{5x}{x^2-4} - 0 = \frac{5x}{x^2-4},$$

$f(x) - 0 > 0$ si $x \to +\infty$, luego, la función queda por encima de la asíntota y $f(x) - 0 < 0$ si $x \to -\infty$, luego, la función queda por debajo de la asíntota.

Los posibles puntos donde puede existir recta asíntota vertical son aquellos que anulan el denominador. En este caso $x = 2$ y $x = -2$.

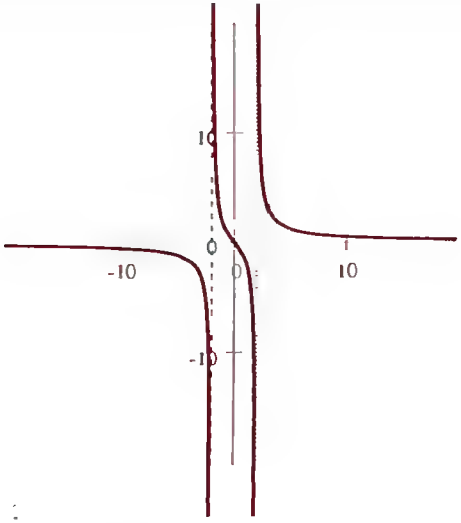
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{5x}{x^2-4} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{5x}{x^2-4} = +\infty,$$

luego, en $x = 2$ hay una recta asíntota vertical de ecuación $x - 2 = 0$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{5x}{x^2 - 4} = -\infty \ , \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{5x}{x^2 - 4} = +\infty,$$

luego, existe una recta asíntota vertical en $x = -2$ cuya ecuación es $x + 2 = 0$.

No existe recta asíntota oblicua, pues hay rectas asíntotas horizontales por los dos lados.



c) No hay asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2 + x}{2x + 6} = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + x}{2x + 6} = -\infty.$$

El denominador de f se anula en $x = -3$ y

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{-3x^2 + x}{2x + 6} = +\infty \ , \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{-3x^2 + x}{2x + 6} = -\infty.$$

luego, en $x = -3$ hay una recta asíntota vertical de ecuación $x + 3 = 0$.

Una recta asíntota oblicua por la derecha ($x \to +\infty$) tiene la ecuación $y = ax + b$ donde

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + x}{x(2x + 6)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x + 1}{2x + 6} = -\frac{3}{2},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-3x^2 + x}{2x + 6} + \frac{3}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + x + 3x^2 + 9x}{2x + 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{10x}{2x + 6} = 5,$$

luego, la recta $y = -\frac{3}{2}x + 5$ es asíntota oblicua de f por la derecha. Análogamente,

$$a' = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{3}{2} \quad ; \quad b' = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right) = 5,$$

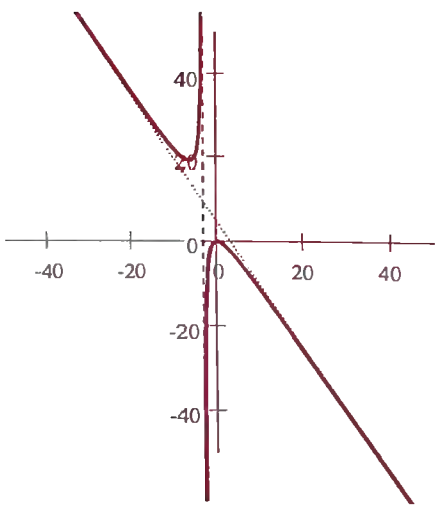
luego, la recta $y = -\frac{3}{2}x + 5$ es asíntota oblicua de f por la izquierda $(x \to -\infty)$.

Estudiamos la situación de la función respecto a la asíntota estudiando el signo de

$$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) = \frac{-3x^2 + x}{2x + 6} + \frac{3}{2}x - 5 = -\frac{30}{2x + 6}.$$

$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) < 0$ si $x \to +\infty$, luego, la función queda por debajo de la asíntota.

$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + 5\right) > 0$ si $x \to -\infty$, luego, la función queda por encima de la asíntota.



d) Procedemos de igual forma.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2x^3 - 4x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2x^3 - 4x^2} = \frac{1}{2},$$

luego, la recta $y = \frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal de la función por ambos lados.

Estudiamos la situación de la función respecto a la asíntota,

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2x^3 - 4x^2} - \frac{1}{2} = \frac{-x + 2}{2x^3 - 4x^2},$$

$f(x) - \frac{1}{2} < 0$ si $x \to +\infty$, la función queda por debajo de la asíntota, y $f(x) - \frac{1}{2} < 0$ si

$x \to -\infty$, la función queda por debajo de la asíntota.

El denominador se anula en $x = 0$ y en $x = 2$, pues $2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-2)$.

En $x = 0$ hay recta asíntota vertical de ecuación $x = 0$ puesto que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2x^3 - 4x^2} = -\infty ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2x^3 - 4x^2} = -\infty .$$

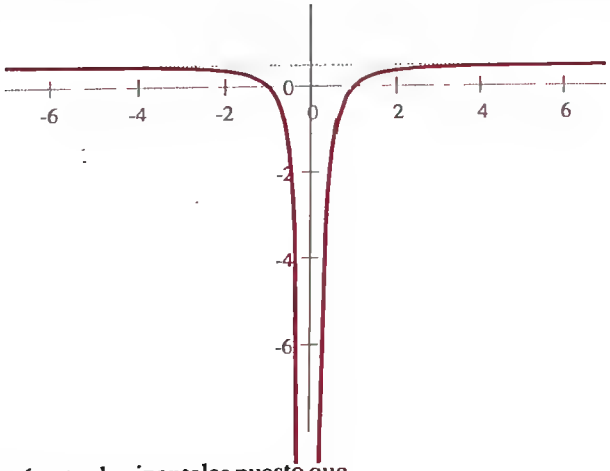
Estudiamos si en $x = 2$ hay recta asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{2x^2(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2} = \frac{3}{8},$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{3}{8},$$

luego, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable únicamente.

No existen asíntotas oblicuas puesto que hay asíntota horizontal por ambos lados.



e) No existen asíntotas horizontales puesto que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = -\infty .$$

El denominador de la función f se anula en $x = -1$. Veamos que en $x = -1$ hay recta asíntota vertical de ecuación $x = -1$, o lo que es lo mismo, $x + 1 = 0$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = +\infty .$$

Estudiamos la existencia de asíntota oblicua de ecuación $y = ax + b$ por ambos lados

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+4}{x(2x+2)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{1}{2}x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+4}{2x+2} = 1$$

por tanto, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es asíntota oblicua de f por la derecha.

$$a' = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad y \quad b' = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = 1,$$

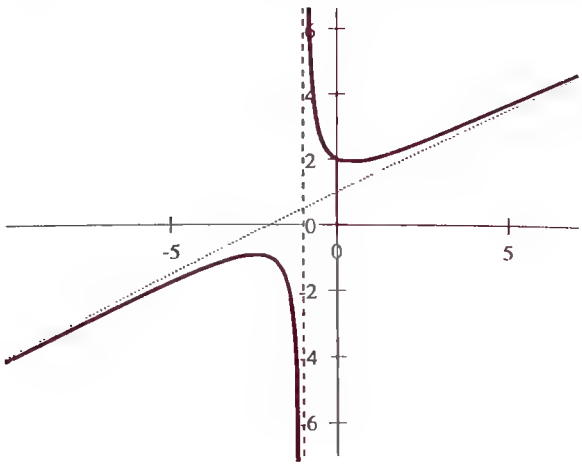
por tanto, la recta $y = \frac{1}{2}x + 1$ es asíntota oblicua de f por la izquierda.

Estudiamos la situación de la función respecto a la asíntota estudiando el signo de

$$f(x) - (\frac{1}{2}x + 1) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{2x+2},$$

$f(x) - (\frac{1}{2}x + 1) > 0$ si $x \to +\infty$, la función queda por encima de la asíntota, y

$f(x) - (\frac{1}{2}x + 1) < 0$ si $x \to -\infty$, la función queda por debajo de la asíntota.



Problema 10

Estudiar la concavidad y convexidad de las funciones:

a) $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 30x^3 + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

c) $f(x) = |x^2 - 9|$

Solución.

a) Como esta función es derivable sucesivamente en todo **R**, aplicamos el criterio de la derivada segunda; $f'(x) = 15x^4 - 80x^3 + 90x^2$ y $f''(x) = 60x^3 - 240x^2 + 180x$.

Buscamos los puntos que anulan a la segunda derivada,

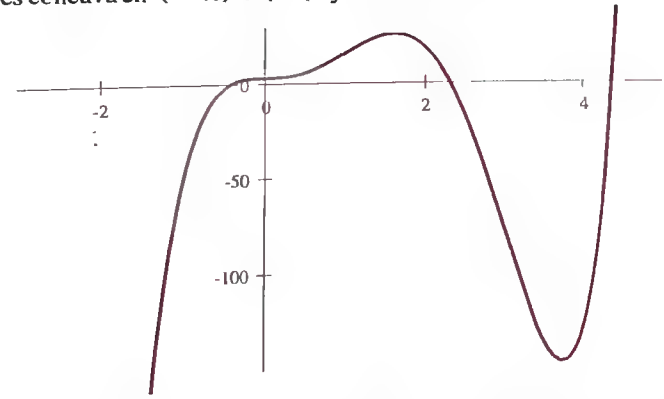
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 60x^3 - 240x^2 + 180x = 0 \Rightarrow 60x(x-1)(x-3) = 0,$$

cuyas raíces son $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

A continuación analizamos el signo de $f''(x)$ para ver donde f es cóncava o convexa.

	x	x - 1	x - 3	f'' (x)	f(x)
$x \in (-\infty,0)$	-		-	-	cóncava
$x \in (0,1)$	+	-	-	+	convexa
$x \in (1,3)$	+	+	-	-	cóncava
$x \in (3,+\infty)$	+	+	+	+	convexa

La función es cóncava en $(-\infty,0) \cup (1,3)$ y convexa en $(0,1) \cup (3,\infty)$.



b) Esta función f está definida en $\mathbf{R} - \{-2\}$, pues el denominador de la expresión de la función f se anula para $x = -2$, y en este conjunto f es continua y derivable por ser cociente de polinomios. El estudio de la concavidad y convexidad lo hacemos en cada uno de los conjuntos $(-\infty,-2)$ y $(-2,+\infty)$ estudiando el signo de la derivada segunda,

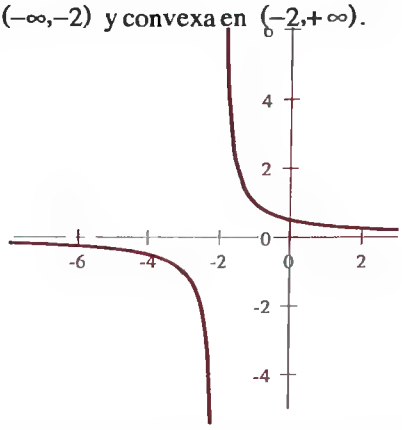
$$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

La función $f''(x)$ en $(-\infty,-2)$ no se anula en ningún punto y verifica que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty,-2)$, luego se trata de una función cóncava en $(-\infty,-2)$.

En $(-2,+\infty)$ la función $f''(x)$ tampoco se anula en ningún punto y $f''(x) > 0$ para

todo $x \in (-2,+\infty)$, luego en este conjunto la función es convexa.

Luego, f es cóncava en $(-\infty,-2)$ y convexa en $(-2,+\infty)$.



c) Primeramente reescribimos la función de la forma que no se utilice el valor absoluto, para ello, utilizamos la definición de éste.

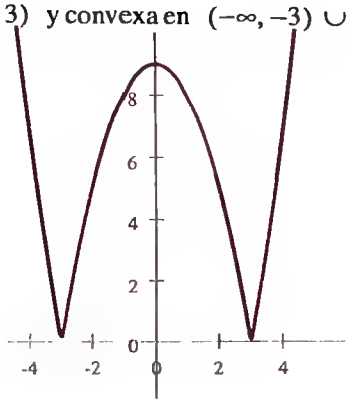
Como $x^2-9=0$ para $x=-3$ y para $x=3$, entonces

$$|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9 & \text{si} \quad x \le -3 \\ -(x^2-9) & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ x^2-9 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases} \quad ; \quad f(x) = \begin{cases} x^2-9 & \text{si} \quad x \le -3 \\ -(x^2-9) & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ x^2-9 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

La función f es continua en $\mathbf{R}$ y derivable sucesivamente en $\mathbf{R}-\{-3,3\}$, por tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -3 \\ -2x & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ 2x & \text{si} \quad 3 < x \end{cases} \quad \text{y} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -3 \\ -2 & \text{si} \quad -3 < x < 3 \\ 2 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}.$$

Luego, f es cóncava en $(-3,3)$ y convexa en $(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$.



Problema 11

Determinar los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = (x-2)^5$

c) $f(x) = (x+1)^4$

Solución.

a) Como f es función racional y su denominador no se anula, f es derivable sucesivamente en todo **R**, por ello, buscamos valores que anulen a la derivada segunda.

Calculamos $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)-(2x\cdot x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ y

$$f''(x) = \frac{(-2x\cdot(x^2+1)^2)-(2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-x^2+1))}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3},$$

y estudiamos los valores x tales que $f''(x) = 0$,

$$\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3-6x = 0 \Rightarrow 2x(x^2-3) = 0,$$

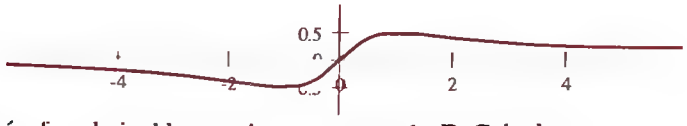
luego $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, anulan a f''.

Si el valor de $f'''(x)$ en estos puntos es distinto de cero, entonces podemos asegurar que estos puntos son puntos de inflexión de f,

$$f'''(x) = \frac{((6x^2-6)\cdot(x^2+1)^3)-(3(x^2+1)^2\cdot 2x\cdot(2x^3-6x))}{(x^2+1)^6} =$$

$$= \frac{-6x^4+36x^2-6}{(x^2+1)^4}.$$

Por ser $f'''(0) \neq 0$, $f'''(-\sqrt{3}) \neq 0$ y $f'''(\sqrt{3}) \neq 0$, los puntos $(0, f(0)) = (0,0)$, $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4})$, son puntos de inflexión de f.



b) La función f es derivable sucesivamente en todo **R**. Calculamos

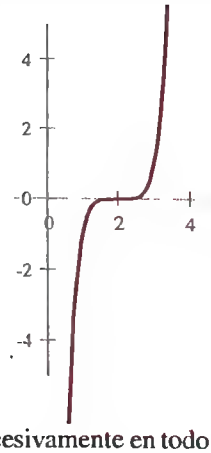
$$f'(x) = 5(x-2)^4 \quad , \quad f''(x) = 20(x-2)^3 \quad \text{y} \quad f'''(x) = 60(x-2)^2,$$

y vemos que valores anulan la segunda derivada; $f''(x) = 0$ únicamente para $x = 2$.

Al ser $f'''(2) = 0$, no podemos asegurar que $x = 2$ sea un punto de inflexión de f, por tanto, aplicamos la definición de punto de inflexión, es decir, vemos si en $x = 2$ la función f pasa de cóncava a convexa o viceversa.

	$x-2$	$(x-2)^3$	$f''(x)$	$f(x)$
$x \in (-\infty,2)$	-	-	-	cóncava
$x \in (2,+\infty)$	+	+	+	convexa

Por tanto, el punto $(2, f(2)) = (2, 0)$ es un punto de inflexión de la función f.

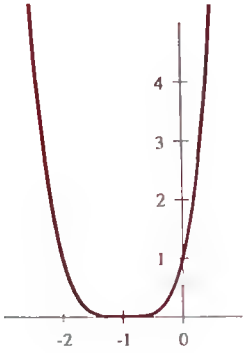


c) La función f es derivable sucesivamente en todo **R**. Calculamos

$$f'(x) = 4(x+1)^3 \quad ; \quad f''(x) = 12(x+1)^2 \quad \text{y} \quad f'''(x) = 24(x+1),$$

y los valores que verifican $f''(x) = 0$; en este caso únicamente $x = -1$.

Como $f'''(-1) = 0$ y $f''(x) = 12(x+1)^2 > 0$, resulta que f es siempre convexa y por tanto no tiene puntos de inflexión.



Problema 12

Hallar los valores de m tales que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es convexa para todo $x \in \mathbf{R}$.

Solución. Como se trata de una función sucesivamente derivable se tiene que si se cumple que la derivada segunda sea positiva para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces f es convexa en $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3 \quad ; \quad f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m .$$

Pero que $12x^2 + 24x + 2m$ sea mayor que cero, implica que $12x^2 + 24x + 2m = 0$ no tiene raíces reales, es decir, ha de ser su discriminante negativo,

$$24^2 - (4 \cdot 12 \cdot 2m) < 0 \Rightarrow 576 - 96m < 0 \Rightarrow m > 6 .$$

Luego, para todo $m > 6$ resulta que f es convexa para todo $x \in \mathbf{R}$.

Problema 13

Dibujar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x(x+1)}$

Solución.

a) Antes de representar la gráfica de f realizamos un estudio de esta función.

- Campo de definición: La función está definida en $\mathbf{R} - \{-3\}$, pues en $x = 3$ se anula el denominador.
- Continuidad y puntos de discontinuidad: Unicamente en $x = -3$ existe una discontinuidad, pues se trata de una función continua en $\mathbf{R} - \{-3\}$ (por ser racional con denominador que no se anula).
- Derivabilidad: Función derivable en $\mathbf{R} - \{-3\}$ (por ser racional con denominador que no se anula).

- Simetrías: No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas (pues $f(-x) \neq f(x)$) ni respecto al origen (pues $f(-x) \neq -f(x)$).
- Asíntotas: En $x = -3$ hay recta asíntota vertical de ecuación $x + 3 = 0$ ya que

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{2x}{x+3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -3^-} \frac{2x}{x+3} = +\infty .$$

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal por ambos lados ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+3} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+3} = 2 ,$$

y la situación de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - 2 = \frac{2x}{x+3} - 2 = \frac{2x - 2x - 6}{x+3} = -\frac{6}{x+3} ,$$

la curva queda por debajo de la asíntota en $+\infty$, puesto que $f(x) - 2 < 0$ si $x \to +\infty$, y queda por encima de la asíntota en $-\infty$, puesto que $f(x) - 2 > 0$ si $x \to -\infty$.

- Puntos de corte con los ejes coordenados: El único punto de corte con los ejes coordenados es el $(0, 0)$.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento: La derivada $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$ no se anula.

Como $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2} > 0$ para todo x perteneciente a su campo de definición (para todo $x \neq -3$), entonces la función f es creciente.

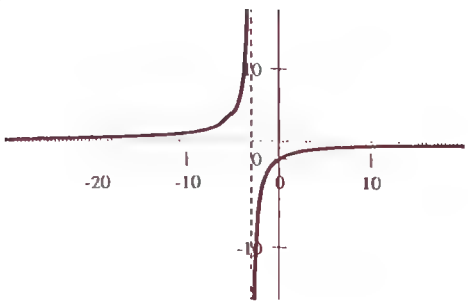
- Máximos y mínimos relativos: No tiene pues la función derivada no se anula.
- Intervalos de concavidad y convexidad: Como $f''(x) = -\dfrac{12}{(x+3)^3}$ resulta que:

Si $x < -3 \Rightarrow (x+3)^3 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en $(-\infty, -3)$.

Si $x > -3 \Rightarrow (x+3)^3 > 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en $(-3, +\infty)$.

- Puntos de inflexión: No tiene ya que f'' no se anula nunca.

El consecuencia, la gráfica de la función es



b) Realizamos un estudio de forma análoga,

- Campo de definición: f está definida en **R** ya que el denominador no se anula .
- Continuidad y puntos de discontinuidad: No existe discontinuidad alguna, pues se trata de una función continua en **R** (por ser racional con denominador que no se anula).
- Derivabilidad: Función derivable (por ser racional con denominador que no se anula).
- Simetrías: Es simétrica respecto al origen ya que

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

- Asíntotas: No hay asíntotas verticales pues la función es continua en todo **R**.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por ambos lados ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0,$$

Veamos la situación de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2}.$$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 0 > 0$, la curva queda por encima de la asíntota, y $f(x) - 0 < 0$ si $x \to -\infty$, la curva queda por debajo de la asíntota.

- Puntos de corte con los ejes coordenados: El único punto de corte con los ejes coordenados es el $(0, 0)$.
- Máximos y mínimos relativos: $f'(x) = \dfrac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Buscamos valores que anulen a la derivada; $f'(x) = 0$ para $x = -1$ y para $x = 1$, además,

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)(2\cdot(1+x^2)\cdot 2x)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},$$

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$ y $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$. Por tanto, el punto $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{2})$ es un máximo relativo y el punto $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{2})$ es un mínimo relativo.

- Intervalos de crecimiento y decreciniento: En $(-1, 1)$ la función es creciente pues pasa de un mínimo a un máximo. En $(-\infty, -1)$ la función es decreciente pues llega a un mínimo y en $(1, \infty)$ decrece también pues en $x = 1$ hay un máximo .
- Puntos de inflexión: Buscamos puntos que anulen a la derivada segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

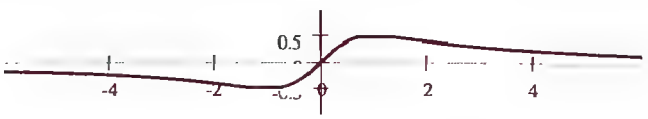
Calculamos el valor de $f'''(x) = \dfrac{-6x^4+36x^2-6}{(1+x^2)^4}$ para esos valores

$f'''(0) = -6 \neq 0$ y $f'''(\sqrt{3}) = f'''(-\sqrt{3}) = \dfrac{3}{16} \neq 0$, por tanto, los puntos

$(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4})$, $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ y $(0, f(0)) = (0,0)$ son puntos de inflexión.

- Intervalos de concavidad y convexidad: En $(-\sqrt{3}, 0)$, f es convexa pues hay un mínimo en ese intervalo; en $(0, \sqrt{3})$, f es cóncava pues hay un máximo. En $(-\infty, -\sqrt{3})$, f es cóncava pues a la derecha de $x = -\sqrt{3}$ la función es convexa y este es un punto de inflexión, y en $(\sqrt{3}, +\infty)$, f es convexa por análoga razón.

Luego, f es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y convexa en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.
En consecuencia, la gráfica de la función es



c) Análogamente,

- Campo de definición: La función está definida para los x tales que el radicando es no negativo. Estudiamos el signo de $f(x)$.

	x	x + 1	f(x)
$x \in (-\infty, -1)$	-	-	+
$x \in (-1, 0)$	-	+	-
$x \in (0, +\infty)$	+	+	+

Luego, el campo de definición es $(-\infty, -1\,] \cup [0, +\infty)$

- Continuidad y puntos de discontinuidad: No existe discontinuidad alguna, pues se trata de una función continua en $(-\infty, -1\,] \cup [0, +\infty)$ (por ser composición de funciones continuas).
- Derivabilidad: Función derivable en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ (por ser composición de funciones derivables).
- Simetrías: No tiene.

• Asíntotas: Asíntotas verticales no tiene pues es una función continua en su campo de definición. Tampoco posee asíntotas horizontales pues

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x(x+1)} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x(x+1)} = +\infty.$$

La recta $y = x + \frac{1}{2}$ es una asíntota oblicua ya que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (1\cdot x)) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x(x+1)} - x)(\sqrt{x(x+1)} + x)}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Veamos la situación de la curva respecto a la asíntota $y = x + \frac{1}{2}$,

$$f(x) - (x+\frac{1}{2}) = \sqrt{x(x+1)} - (x+\frac{1}{2}) = (\sqrt{x^2+x} - x) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} - \frac{1}{2} = \frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)} - \frac{1}{2}.$$

$f(x) - (x+\frac{1}{2}) < 0$ si $x \to +\infty$, la curva queda por debajo de la asíntota.

Además, $y = -x - \frac{1}{2}$ es otra asíntota oblicua ya que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \quad \text{(nótese que para todo } x<0 \text{ se cumple } x = -\sqrt{x^2}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-\sqrt{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-1)x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+1}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Veamos la situación de la curva respecto a la asíntota $y=-x-\frac{1}{2}$:

$$f(x)-(-x-\frac{1}{2})=\sqrt{x(x+1)}+x+\frac{1}{2}=(\sqrt{x^2+x}+x)+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}+\frac{1}{2}=\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}-x)}+\frac{1}{2}.$$

$f(x)-(-x-\frac{1}{2})<0$ si $x\to-\infty$, la curva queda por debajo de la asíntota.

- Puntos de corte con los ejes coordenados: Los puntos de corte con los ejes coordenados son el $(0,0)$ y $(-1,0)$, puesto que

$$f(x)=0\Rightarrow\sqrt{x(x+1)}=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x=0 \text{ y } x=-1.$$

- Máximos y mínimos relativos: Buscamos los valores que anulan a la derivada

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}},\ f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2},$$

pero este valor no es del campo de definición de f. Luego, la derivada primera nunca se anula en el campo de definición de f y, por tanto, no posee ni máximos ni mínimos relativos (pues se trata de una función derivable).

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Estudiamos el signo de $f'(x)$.

Si $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow f'(x)<0$ y f es decreciente, y si $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$ y f es creciente.

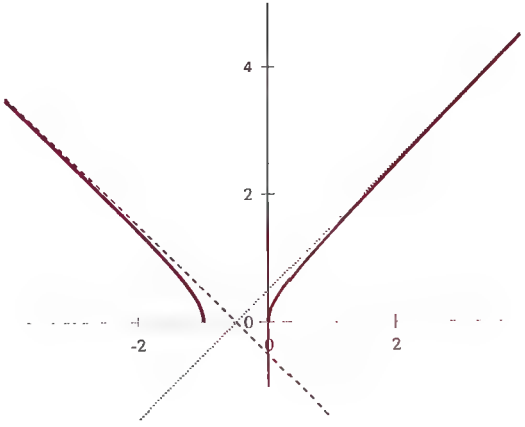
- Puntos de inflexión: Buscamos los valores que anulan a la derivada segunda,

$$f''(x)=\frac{4\sqrt{x^2+x}-\left((2x+1)\cdot 2\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)}{4(x^2+x)}=\frac{-1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}.$$

Como f'' no se anula en el dominio de f, entonces f no tiene puntos de inflexión (pues se trata de una función derivable).

- Intervalos de concavidad y convexidad: Como en el campo de definición de f siempre $x^2 + x \geq 0$, entonces $f''(x) < 0$. Luego f es cóncava para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

El consecuencia, la gráfica de la función es



TEMA 26

Funciones trigonométricas

Problema 1

Hallar las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$, en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución. En la ecuación (aparecen dos razones trigonométricas de dos ángulos distintos, por ello, se trata de escribir la ecuación de forma que tan sólo aparezcan razones trigonométricas de un único ángulo) se aplica la igualdad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ y se reescribe la ecuación como

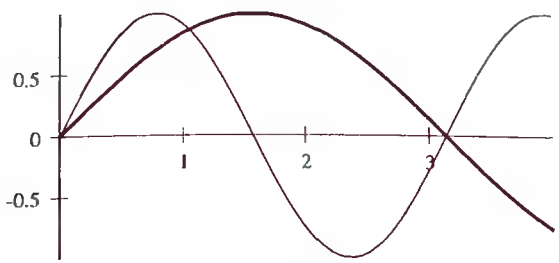
$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x \qquad \text{de donde} \qquad \operatorname{sen} x (1 - 2 \cos x) = 0.$$

Para que un producto sea cero basta que algún factor sea cero, es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{o} \qquad 1 - 2 \cos x = 0.$$

De $\operatorname{sen} x = 0$ se obtiene $x = 0$ y $x = \pi$ como únicas raíces en $[0,\pi]$ y la única raíz de $1 - 2 \cos x = 0$, o lo que es lo mismo $\cos x = \frac{1}{2}$, es, $x = \frac{\pi}{3}$.

Las raíces contenidas en $[0,\pi]$ son $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \pi$.



Problema 2

Hallar los valores de x tales que $0 \le x \le 2\pi$ que verifican la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \operatorname{sen} x = 0.$$

Solución. En la ecuación (aparecen dos razones trigonométricas distintas de un mismo ángulo, por ello, se trata de escribir la ecuación de forma que tan sólo aparezcan una única razón trigonométrica de dicho ángulo) se aplica la igualdad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, para despejar el cuadrado del coseno en función del seno y sustituirlo en la ecuación, $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, y se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Esta última ecuación es una ecuación de segundo grado en sen x, por ello, si ponemos T en lugar de sen x se tiene la siguiente ecuación polinómica de segundo grado

$$2T^2 + T - 1 = 0,$$

cuyas raíces son $T = \frac{1}{2}$ y $T = -1$. Luego, se nos plantean resolver las ecuaciones (por separado):

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}, \text{ cuyas raíces en } [0,2\pi] \text{ son } \quad x = \frac{\pi}{6} \quad y \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\operatorname{sen} x = -1, \text{ cuyas única raíz en } [0,2\pi] \text{ es } \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Conclusión: Las soluciones de la ecuación dada son $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Problema 3

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} x} + 2 = 0$

b) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(x + \frac{5\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{12}$

c) $\sec x = \cos x + \operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$

Solución.

a) Aplicamos la fórmula obtenida en el Problema 11 del Tema 11 (para que sólo queden razones trigonométricas de un único ángulo) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ y la ecuación se reescribe como

$$\frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{sen} x} + 2 = 0.$$

Mediante transformaciones sucesivas (que efectuamos con el fin de dejar expresada la ecuación en función de

una sola variable) resulta:

$$\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}+2=0 \Rightarrow \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}+2\operatorname{sen}x=0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\cos x}}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+2\operatorname{sen}x=0.$$

Al sacar factor común $2\operatorname{sen}x$: $2\operatorname{sen}x\left(\dfrac{\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+1\right)=0$ de lo que se deduce que alguno de sus dos factores es nulo,

$$\operatorname{sen}x=0 \Rightarrow x_1=0+k\pi.$$

$$\frac{\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+1=0 \Rightarrow \cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=0 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+\cos x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

(sustituyendo cosx por T) $\Rightarrow 2T^2+T-1=0 \Rightarrow \begin{cases} T=-1 \\ T=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Luego,

$$\text{si } T=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_3=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

$$\text{si } T=-1 \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x_4=\pi+2k\pi.$$

Conclusión: Las soluciones de la ecuación original son $x_1=k\pi, x_2=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ y $x_3=\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$ con $k\in \mathbf{N}$ (la cuarta solución está contenida en la primera).

b) Al sustituir (la fórmula trigonométrica que permite transformar la suma de senos en un producto)

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{12}$$

en la ecuación se obtiene que $2\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{12}$, y al dividir por $\cos\dfrac{\pi}{12}$ se tiene

$$2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{o}\\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{o}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$

Las raíces de dicha ecuación en $[0,2\pi]$ son $x_1=\dfrac{\pi}{2}$ y $x_2=\dfrac{11\pi}{6}$.

Conclusión: Las soluciones de la ecuación dada son $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ y $x_2=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$.

c) Escribimos la secante en función del coseno:

$$\sec x=\cos x+\operatorname{sen}x\Rightarrow\frac{1}{\cos x}=\cos x+\operatorname{sen}x\quad 1=\cos^2x+\operatorname{sen}x\cos x\ (1-\cos^2x=\operatorname{sen}^2x)$$

$$\Rightarrow 1-\cos^2x=\operatorname{sen}x\cos x\Rightarrow\operatorname{sen}^2x=\operatorname{sen}x\cos x\Rightarrow\quad\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x-\cos x)=0$$

Por consiguiente, uno de los dos factores es nulo,

$$\text{Si }\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0+2k\pi\\ \\ x=\pi+2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=0+k\pi=k\pi.$$

$$\text{Si }\operatorname{sen}x-\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Conclusión: Las soluciones pedidas son $x_1=k\pi$ y $x_2=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

d) Como $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}3x=2\operatorname{sen}2x\cos x$ y $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, entonces la ecuación se escribe de la forma

$$2\operatorname{sen}2x\cos x=2\cos 2x\cos x\Rightarrow 2\cos x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)=0.$$

Por tanto, las soluciones serán las de las ecuaciones

$$\cos x=0\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}2x-\cos 2x=0.$$

$$\text{Si }\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ \\ x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

$$\text{Si }\cos 2x-\operatorname{sen}2x=0\Rightarrow\cos 2x=\operatorname{sen}2x\Rightarrow\begin{cases}2x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \\ 2x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}.$$

Conclusión: Las soluciones son $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y $x_2 = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

Problema 4

Determinar la soluciones contenidas en $[0, \frac{\pi}{2}]$ de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ tgx + tgy = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} tg(x+y) = \sqrt{3} \\ tg(x-y) = 1 \end{cases}$

Solución.

a) El sistema de ecuaciones es equivalente al sistema $\begin{cases} 2\cos x \cos y = 1 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 2 \end{cases}$.

Reescribimos de otra forma la segunda ecuación,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y = 2\cos x \cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) = 2\cos x \cos y.$$

Al sustituir la primera ecuación en la segunda se tiene que

$$\operatorname{sen}(x+y) = 1 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} \quad (\text{pues } x+y \in [0,\pi]).$$

Ahora bien, si x e y son ángulos complementarios (es decir, suman $\frac{\pi}{2}$), entonces sen x = cos y, con lo cual se reescribe la primera ecuación del sistema como

$$2 \cos x \operatorname{sen} x = 1 \text{ (que es la fórmula del sen2x)} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4},$$

y como x e y son complementarios, entonces $y = \frac{\pi}{4}$.

Conclusión: La solución del sistema pedida es $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$.

b) De la primera ecuación del sistema se deduce que $x + y = \frac{\pi}{3}$ (pues $x+y \in [0,\pi]$), mientras que de la segunda resulta $x - y = \frac{\pi}{4}$ (pues $x-y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3} \\ x-y=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ de solución $x=\dfrac{7\pi}{24}$, $y=\dfrac{\pi}{24}$

Conclusión: La solución del sistema es $x=\dfrac{7\pi}{24}$, $y=\dfrac{\pi}{24}$.

Problema 5

Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen}^3 4x$ b) $g(x)=(1+\cos^2 x)^3$

c) $h(x)=\cos(\cos x)$ d) $u(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}$

e) $v(x)=\sqrt{x}\cdot \operatorname{arctg} x$ f) $w(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$

Solución.

a) Para $f(x)=\operatorname{sen}^3 4x$ (se aplica la derivada de una potencia y la regla de la cadena) se tiene

$$f'(x)=3\cdot \operatorname{sen}^2 4x\cdot(\operatorname{sen} 4x)'=12\cdot \operatorname{sen}^2 4x\cdot \cos 4x.$$

b) Análogamente (se aplica la derivada de una potencia y la regla de la cadena),

$$g'(x)=3(1+\cos^2 x)^2(1+\cos^2 x)'=3(1+\cos^2 x)^2 2\cos x(\cos x)'=$$

$$=3(1+\cos^2 x)^2 2\cos x(-\operatorname{sen} x)=-6\operatorname{sen} x\cos x(1+\cos^2 x)^2.$$

c) Análogamente (se aplica la regla de la cadena),

$$h'(x)=(-\operatorname{sen}(\cos x))(\cos x)'=\operatorname{sen}(\cos x)\operatorname{sen} x.$$

d) Si tenemos en cuenta que $u(x)=(\operatorname{tg} 2x)^{1/3}$, entonces

$$u'(x)=\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 2x)^{-2/3}(\operatorname{tg} 2x)'=\frac{1}{3}(\operatorname{tg} 2x)^{-2/3}(1+\operatorname{tg}^2 2x)2=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2 2x)}{3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 2x}}.$$

e) Derivamos como un producto,

$$v'(x)=(\sqrt{x})'\operatorname{arctg} x+\sqrt{x}(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x+\sqrt{x}\frac{1}{1+x^2}=\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

$$f)\ w'(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Problema 6

Aplicar la regla de l'Hôpital para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{x + \operatorname{arctg} x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$

d) $\lim_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Solución.

a) Aplicar las propiedades algebraicas de los límites genera una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (ya que cuando x tiende a cero tanto la función arcsenx como la arctgx se anulan). Para evitarla aplicamos la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{x + \operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \frac{1}{1+x^2}} = \frac{0}{2} = 0.$$

b) Igual que en el apartado anterior aplicamos la regla de l'Hôpital sucesivamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-6\cos x \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^3 x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{3}{2}.$$

c) Si sustituimos x por 0 en la expresión, resulta la indeterminación $\infty - \infty$, que resolvemos reescribiendo la función de la siguiente forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Pero si volvemos a sustituir en esta última expresión x por 0, obtenemos otra indeterminación, esta vez del tipo $\frac{0}{0}$ que resolvemos aplicando nuevamente la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

d) Al sustituir x por 1, nos resulta la indeterminación $0 \cdot \infty$ (que vamos a transformar en otra del tipo $\frac{0}{0}$ para poder resolver con la regla de l'Hôpital). La expresión de función del límite la escribimos de la

siguiente forma:

$$(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x = \frac{(1-x)\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}.$$

Luego:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x} = \text{(aparece nuevamente } \tfrac{0}{0} \text{ y aplicamos la regla de l'Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}x + (1-x)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}x} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Problema 7

Derivar:

a) $f(x) = \mathrm{sen}^3(x^2-1)\cdot \mathrm{tg}(\sqrt{1-2x})$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos^3(\frac{x}{2})}$

Solución.

a) Derivamos como un producto de funciones,

$$f'(x) = 3\mathrm{sen}^2(x^2-1)\cdot\cos(x^2-1)\cdot 2x\cdot \mathrm{tg}(\sqrt{1-2x}) +$$

$$+\mathrm{sen}^3(x^2-1)\cdot\frac{1}{\cos^2(\sqrt{1-2x})}\cdot\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} =$$

$$= 6x\mathrm{sen}^2(x^2-1)\cdot\cos(x^2-1)\cdot\mathrm{tg}(\sqrt{1-2x}) - \frac{\mathrm{sen}^3(x^2-1)}{\sqrt{1-2x}\cdot\cos^2(\sqrt{1-2x})}.$$

b) Derivamos como un cociente,

$$g'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\cos^3(\frac{x}{2}) - \sqrt{1-x^2}\,3\cos^2(\frac{x}{2})\,(-\mathrm{sen}(\frac{x}{2}))\,\frac{1}{2}}{\cos^6(\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{\dfrac{-x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)} .$$

Problema 8

Estudiar y representar la función $f(x) = \mathrm{sen}x + \cos x$

Solución. El dominio de definición de la función **f** es **R**, es una función continua y derivable en todo **R** (ya que es la suma de las funciones senx y cosx que están definidas para todo número real y son conunuas y derivables en su dominio de definición).

La función no es simétrica ni respecto del eje Y ni respecto del origen de coordenadas pues $f(-x) = \mathrm{sen}(-x) + \cos(-x) = -\mathrm{sen}x + \cos x$ y es distinto de $f(x)$ y de $-f(x)$.

La función es periódica de periodo 2π por ser la suma de dos funciones periódicas de periodo 2π. Por ello, estudiaremos únicamente la función en el intervalo $[0,2\pi)$.

El punto de corte con el eje Y es el punto $(0,1)$, y con el eje X son los puntos $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ y $(\frac{7\pi}{4}, 0)$, puesto que

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = \mathrm{sen}x + \cos x \Rightarrow \mathrm{sen}x = -\cos x \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}.$$

Se comprueba facílmente que esta función no tienen rectas asíntotas.

A continuación estudiamos el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, concavidad y convexidad de la función. Para ello, aplicamos los resultados conocidos para funciones derivables que se refieren a condiciones suficientes.

Derivamos tres veces la función

$$f'(x) = \cos x - \mathrm{sen}x \quad , \quad f''(x) = -\mathrm{sen}x - \cos x \quad y \quad f'''(x) = -\cos x + \mathrm{sen}x.$$

Como $f'(x) = 0$ para $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ y $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$ y

$f''(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ f alcanza un máximo relativo en el punto $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

$f''(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ f alcanza un mínimo relativo en el punto $(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$.

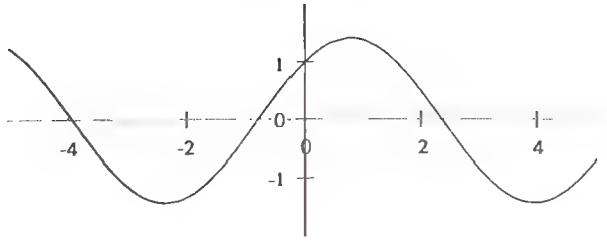
Además, f es decreciente en el intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ pues se pasa de un máximo a un

mínimo y la función es continua. La función es creciente en $[0, \frac{\pi}{4})$ y en $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$ por análogas razones.

Como $f''(x) = 0$ para $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ y, además, $f'''(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \neq 0$ y $f'''(\frac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2} \neq 0$, entonces f posee los puntos de inflexión $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ y $(\frac{7\pi}{4}, 0)$.

La función f es convexa en el intervalo $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ puesto que en un punto de él posee un mínimo relativo y la función es continua. La función f es cóncava en $[0, \frac{3\pi}{4})$ y en $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ por análogas razones.

Todos los datos obtenidos de la función permiten dibujar la gráfica de ésta.



Problema 9

Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución. La función $f(x)$ es continua en $[0,1]$ y, por tanto, posee un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo por el Teorema Weierstrass. Estos valores máximos y mínimos absolutos se alcanzan o en máximos y mínimos relativos o en los extremos del intervalo.

La función es derivable en ese intervalo (pues es la composición de las funciones $f_1(x) = \frac{1-x}{1+x}$ y $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ que son derivables en $[0,1]$). Así pues, aplicamos los resultados correspondientes a funciones derivables para estudiar los máximos y mínimos relativos en $(0,1)$.

Determinamos la función derivada primera,

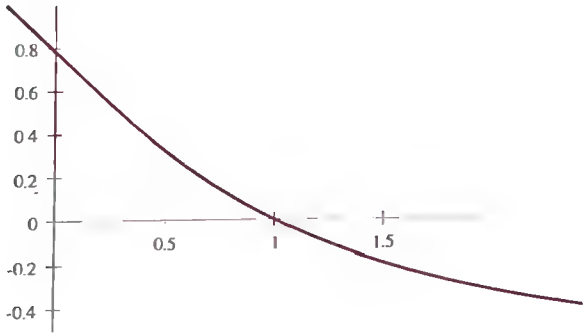
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-2}{1+x^2+2x+1+x^2-2x} = \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Evidentemente, $f''(x) \neq 0$ para cualquier $x \in (0,1)$ (no se cumple la condición necesaria de extremo relativo en un intervalo abierto)y la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en (0,1). Por consiguiente, el máximo y el mínimo absolutos los alcanza en los extremos del intervalo [0,1].

Hallamos los valores de la función en $x = 0$ y $x = 1$; $f(0) = \frac{\pi}{4}$ y $f(1) = 0$.

Conclusión: El máximo absoluto se alcanza en $x = 0$ y es $f(0) = \frac{\pi}{4}$, mientras que el mínimo en $x = 1$ y vale $f(1) = 0$.



Problema 10

Utilizar las derivadas para probar que para todo $x \geq 1$ se cumple la igualdad

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Se considera la función $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}$ que está definida en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ (pues para $-1 < x < 1$ la expresión $\sqrt{x^2-1}$ no es un número real).

Esta función es derivable en su dominio de definición y

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \cdot (\sqrt{x^2-1})' + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \cdot (\frac{1}{x})' =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = 0 .$$

Como la función derivada es nula en $[1,\infty)$, entonces la función $f(x)$ es constante en $[1,\infty)$.

Luego, $f(x) = f(1)$ y $f(1) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcsen}\frac{1}{0} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Conclusión: Que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x \geq 1$ es lo mismo que decir que para todo $x \geq 1$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} .$$

TEMA 27

Funciones logarítmicas y exponenciales

Problema 1

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{y^2-3} \\ 27^{3y+1} = 81^{x+4} \cdot 3^{y+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x = 9 + 3^y \\ 2^{x+1} = 3^{y+1} + 9 \end{cases}$

Solución.

a) Puesto que la base del primer miembro de la primera ecuación es $\frac{1}{2}$, tratamos de expresar el segundo miembro como potencia de $\frac{1}{2}$, como $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, entonces

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{y^2-3} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{y^2-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2y^2-6}$$

La primera ecuación se transforma en $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2y^2-6}$ y tiene la misma solución que la ecuación $2x - 1 = 2y^2 - 6$ (pues la exponencial es una aplicación inyectiva).

La segunda ecuación del sistema la expresamos con exponenciales de base 3:

$$(3^3)^{3y+1} = (3^4)^{x+4} \cdot 3^{y+1} \Rightarrow (3)^{(3y+1)3} = (3)^{(x+4)4} \cdot 3^{y+1}$$

$$3^{9y+3} = 3^{4x+16+y+1} \Rightarrow 9y + 3 = 4x + 16 + y + 1.$$

Por consiguiente, el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x = 2y^2 - 5 \\ 8y = 4x + 14 \end{cases},$$

que resolvemos por sustitución; $x = \dfrac{2y^2-5}{2}$ se sustituye en la segunda ecuación

$$8y = 4y^2 - 10 + 14 \Rightarrow 0 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow 0 = (y-1)^2 \Rightarrow y = 1,$$

y al sustituir este valor en $x = \dfrac{2y^2-5}{2}$ se obtiene $x = -\dfrac{3}{2}$.

Conclusión: El sistema es compatible y su única solución es $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = 1$.

b) Por tratarse de una suma de exponenciales no podemos tomar logaritmos (ya que no hay ninguna propiedad que nos indique a qué es igual el logaritmo de una suma).

Entonces para resolverlo utilizaremos la técnica del cambio de variable (pues tanto la variable x como la y aparecen siempre elevadas a la misma potencia) y ponemos de manifiesto las potencias 2^x y 3^y, a las que tomamos como nuevas incógnitas, $2^x = t$ y $3^y = u$.

$$\begin{cases} 2^x = 9 + 3^y \\ 2^{x+1} = 3^{y+1} + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 9 + 3^y \\ 2^x \cdot 2 = 3^y \cdot 3 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 9 + u \\ 2t = 3u + 9 \end{cases},$$

cuya solución es $u = 9$; $t = 18$.

Como $2^x = t$, $3^y = u$ entonces

$$2^x = 18 \Rightarrow x = \log_2 18 \quad , \quad 3^y = 9 \Rightarrow y = 2.$$

Conclusión: La solución del sistema es $x = \log_2 18$, $y = 2$.

Problema 2

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} \log y + \log 2 = 3\log x + 2\log 2 \\ 2\log y = 2\log 2 + 5\log x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log (x^2 + 12) = 2\log y \\ \log y = \log (x + 3) \end{cases}$

Solución.

a) Al aplicar las propiedades de los logaritmos reescribimos este sistema como

$$\begin{cases} \log(2y) = \log(4x^3) \\ \log(y^2) = \log(4x^5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4x^3 \\ y^2 = 4x^5 \end{cases}$$

Al despejar y en la primera ecuación y sustituirlo en la segunda se obtiene:

$$4x^6 - 4x^5 = 0 \Rightarrow 4x^5(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^5 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones polinómicas son

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = 1,\ y_2 = 2.$$

La primera solución del sistema polinómico no es solución del sistema logarítmico pues log0 no es un número real.

Conclusión: La solución del sistema propuesto es $x = 1$, $y = 2$.

b) Si sustituimos el log y de la segunda ecuación en la primera obtenemos

$\log(x^2 + 12) = 2\log(x+3)$ (por el logaritmo de una potencia) $\log(x^2 + 12) = \log(x+3)^2$,

de donde $x^2 + 12 = (x+3)^2$ (pues el logaritmo es una aplicación inyectiva)

$$x^2 + 12 = (x+3)^2 \Rightarrow 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Si $x = \frac{1}{2}$ (sustituyendo en la segunda ecuación) entonces $y = \frac{7}{2}$.

Conclusión: La solución del sistema logarítmico es $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{7}{2}$.

Problema 3

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log x = \log(2y) + \log 2 \\ \log x^2 = 3\log y - \log y^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_{10} x + \log_{10} y = 3 \\ x + y = 70 \end{cases}$

Solución.

a) Al aplica las propiedades de los logaritmos el sistema se escribe de la siguiente forma

$$\begin{cases} \log x = \log(4y) \\ \log x^2 = \log \dfrac{y^3}{y^2} \end{cases} \underset{\text{(por ser la función logaritmo inyectiva)}}{\approx} \begin{cases} x = 4y \\ x^2 = y \end{cases},$$

y al sustituir la segunda ecuación en la primera resulta,

$$x = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x = 0 \Rightarrow x(4x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones polinómicas son

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0 \quad y \quad x_2 = \frac{1}{4},\ y_2 = \frac{1}{16}.$$

La primera solución del sistema polinómico no es solución del sistema logarítmico pues log0 no es un número real, pero la segunda si.

Conclusión: La solución del sistema inicial es $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{16}$.

b) La ecuación $\log_{10} x + \log_{10} y = 3$ es igual a $\log_{10}(xy) = 3$ (por la fórmula del logaritmo de un producto), y al aplicar la definición de logaritmo transformamos esta expresión logarítmica en otra expresión de tipo exponencial $x \cdot y = 10^3$. Por tanto, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x \cdot y = 1000 \\ x + y = 70 \end{cases}$$

Al despejar x de la segunda ecuación y al sustituir en la primera ecuación se tiene

$$(70 - y)\,y = 1000 \Rightarrow 0 = y^2 - 70y + 1000,$$

ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $y_1 = 20$ e $y_2 = 50$. Para $y_1 = 20$ se tiene que $x_1 = 50$, y para $y_2 = 50$ se tiene $x_2 = 20$.

Conclusión: Las soluciones del sistema son $x_1 = 50, y_1 = 20$ y $x_2 = 20, y_2 = 50$.

Problema 4

¿Qué hay que hacerle a un número para que su logaritmo aumente en 2 unidades?

Solución. Si y es el número dado y x el número ya transformado, entonces

$$\log_a x = \log_a y + 2 \Rightarrow \log_a x - \log_a y = 2 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = 2,$$

y al transformar (aplicando la definición de logaritmo) la ecuación en una ecuación exponencial se tiene

$$\log_a \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{x}{y} \Rightarrow x = a^2 \cdot y.$$

Conclusión: Para que el logaritmo de un número aumente en 2 unidades hay que

multiplicar al número por el cuadrado de la base del logaritmo que se considera.

Problema 5

Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x) = \log_x e^{nx}$, con $n \in \mathbf{R}$.

Solución. Inicialmente buscamos una expresión de la función en la cual no aparezca el logaritmo en base x, para ello, aplicamos la definición de logaritmo y se tiene que

$$f(x) = \log_x e^{nx} \Rightarrow x^{f(x)} = e^{nx},$$

y al tomar logaritmos (neperianos)

$$f(x)\log x = nx \Rightarrow f(x) = \frac{nx}{\log x},$$

que se trata de una función definida en $(0, 1) \cup (1,\infty)$ pues el denominador se anula en $x = 1$, continua y derivable sucesivamente en dicho conjunto.

A continuación, buscamos los valores de x que anulan a la derivada

$$f'(x) = \frac{n\log x - nx\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{n\log x - n}{(\log x)^2},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow n\log x - n = 0 \Rightarrow n(\log x - 1) = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e.$$

La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{n\frac{1}{x}(\log x)^2 - n(\log x - 1)\,2(\log x)\frac{1}{x}}{(\log x)^4} =$$

$$= \frac{\frac{n}{x}\log x - 2\frac{n}{x}(\log x - 1)}{(\log x)^3} = \frac{n(2 - \log x)}{x(\log x)^3},$$

y para $x = e$ es $f''(e) = \frac{n}{e}$. Así pues, el signo de $f''(e)$ depende del signo de n.

Conclusión: La función alcanza en el punto (e,ne) (pues $f(e) = \log_e e^{ne} = ne$) un máximo si n es negativo y un mínimo si n es positivo.

Problema 6

Hallar el mínimo de la función $f(x) = e^x - x - 1$ y deducir que $e^x \geq x + 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Solución. Como la función es sucesivamente derivable en todo **R**, los posibles extremos

relativos se obtienen de la condición necesaria $f'(x) = 0$, donde $f'(x) = e^x - 1$.

La ecuación $e^x - 1 = 0$, tiene por única raíz $x = 0$.

Como $f''(x) = e^x$ y $f''(0) = 1 > 0$, entonces en $x = 0$ la función alcanza un mínimo relativo.

Por la definición de mínimo se tiene que $f(x) = e^x - x - 1 \geq f(0) = 0$ de lo que se deduce que $e^x \geq x + 1$

Problema 7

Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f(x) = xe^{3x}$

Solución. La función está definida en **R** y es derivable sucesivamente en dicho conjunto. así pues, aplicamos los criterios relativos a la derivada segunda.

$f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = e^{3x}(1+3x)$; $f''(x) = e^{3x}3(1+3x) + 3e^{3x} = e^{3x}3(2+3x)$.

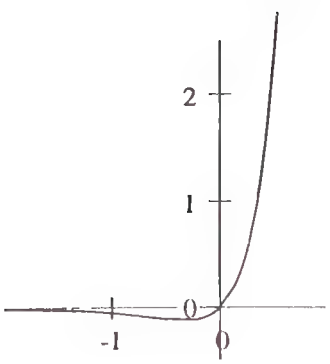
$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{3x}3(2+3x) = 0 \Rightarrow 2+3x = 0$ (ya que $e^{3x} > 0$ para todo x real)

cuya solución es $x = -\frac{2}{3}$.

A continuación estudiamos el signo de $f''(x)$.

Si $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$ entonces $f''(x) < 0$, pues $f''(-1) = e^{-3}3(2-3) = -\frac{3}{e^3} < 0$

y $f''(x)$ es una función continua que sólo se anula en $x = -\frac{2}{3}$. Luego, f(x) es cóncava en ese conjunto. Si $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$ entonces $f''(x) > 0$, luego f(x) es convexa (por análoga razón).



Problema 8

Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \log(1+x^2)$.

Solución.

- Campo de definición o dominio: La función está definida en $\mathbf{R}$ (ya que $1+x^2$ es siempre positivo).
- Continuidad y puntos de discontinuidad: La función es continua en todo punto (pues $1+x^2 \geq 1$ para todo x).
- Derivabilidad: La función es derivable en todo punto (pues $1+x^2 \geq 1$ para todo x).
- Simetrías: La función es simétrica respecto al eje Y pues

$$f(x) = \log(1+x^2) = \log[1+(-x)^2] = f(-x).$$

- Asíntotas: No hay asíntotas verticales pues la función es continua. Tampoco existen asíntotas horizontales pues $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

No hay asíntota oblicuas por la derecha pues

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\log(1+x^2)}{x} \text{ (indeterminación } \infty/\infty) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

(pues se aplicó la regla de l'Hôpital) y tampoco por la izquierda por análoga razón ($\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$).

- Puntos de corte con los ejes: La función corta al eje X en

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log(1+x^2) = 0 \Rightarrow e^0 = 1+x^2 \Rightarrow 1 = 1+x^2 \Rightarrow x = 0,$$

luego, la gráfica corta a los ejes en (0,0).

- Máximos y mínimos relativos: Buscamos los valores que anulan a la derivada,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\ ;\ f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

(condición necesaria de extremo). En $x = 0$ existe máximo o mínimo dependiendo del signo de la derivada segunda (estudiamos entonces el signo de $f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x2x}{(1+x^2)^2}$ en x=0)

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 2 > 0,$$

luego, en $x = 0$ existe un mínimo relativo, y como $f(0) = 0$ entonces en el punto (0,0) está dicho mínimo relativo.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $f'(x) < 0$ (al ser el denominador siempre positivo el signo de $f'(x)$ depende sólo del numerador), luego f(x) es decreciente, y si

$x \in (0,\infty)$ entonces $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

- Puntos de inflexión: Buscamos los valores que anulan a

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}\,;\quad f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \\ x = 1 \end{cases},$$

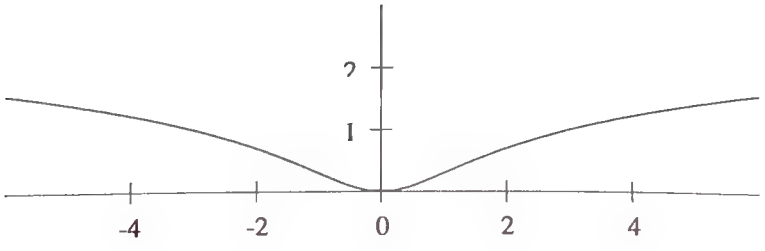
y estudiamos el valor de $f'''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}$ en estos valores,

$$f'''(1) = -1 \neq 0 \quad y \quad f'''(-1) = 1 \neq 0$$

por tanto, hay puntos de inflexión. Como $f(1) = \log 2$ y $f(-1) = \log 2$, entonces $(1, \log 2)$ y $(-1, \log 2)$ son los puntos de inflexión.

- Intervalos de concavidad y convexidad: En el intervalo $(-1,1)$ hay un mínimo luego en él la función es convexa $(f''(x)>0)$. En $(-\infty,-1)$ la función es cóncava $(f''(x)<0)$ pues en $x = -1$ hay punto de inflexión y a la derecha de este punto la función es convexa y en $(1,\infty)$ también es cóncava por análoga razón.

Una vez estudiada la función se dibuja la gráfica de la función,



Problema 9

Dibujar las gráficas de las funciones siguientes:

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{\log x}{x} \ \text{ si } x > 0 \qquad \text{b)}\ g(x) = x^2 e^{-x}.$$

Solución.

a) La función está definida en $(0,\infty)$, pues $\log x$ está definida en dicho conjunto y no existe ningún valor de x que anule el denominador en dicho dominio de definición. Además. f es una función continua y derivable sucesivamente puesto que es cociente de funciones continuas y derivables y el denominador no se anula.

- Puntos de corte con los ejes: La gráfica de la función corta con el eje X en $x = 1; (1,0)$ $\left(\text{pues } \frac{\log 1}{1} = 0\right)$, y no corta al eje Y (ya que $\log 0 = -\infty$).

- Simetrías: No es simétrica puesto que no está definida para valores negativos.
- Máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento: Buscamos los valores que anulan la derivada,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2}\ ;\ \frac{1-\log x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1-\log x = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e,$$

y estudiamos el valor de $f''(x) = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$ para ese valor de x, $f''(e) = -\dfrac{1}{e^3} < 0$, luego (como para $x = e$ es $f(x) = \dfrac{\log e}{e} = \dfrac{1}{e}$) en el punto $(e, \dfrac{1}{e})$ hay un máximo relativo.

Si $x < e$ entonces $f(x)$ crece y si $x > e$ decrece (pues en $x = e$ hay un máximo).

- Puntos de inflexión: Una condición es que $f''(x) = 0$ (es decir, $2\log x - 3 = 0$), siendo la raíz de esta ecuación $x = e^{3/2}$ (cuya imagen es $f(e^{3/2}) = \dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$), y una suficientes es,

$$f'''(x) = \frac{2\frac{1}{x}x^3 - 3x^2(2\log x - 3)}{x^6} = \frac{11 - 6\log x}{x^4};\ f'''(e^{3/2}) = \frac{11 - 6\log e^{3/2}}{(e^{3/2})^4} = \frac{2}{e^6} \neq 0$$

Por consiguiente, el punto $(e\sqrt{e}, \dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2})$ es un punto de inflexión.

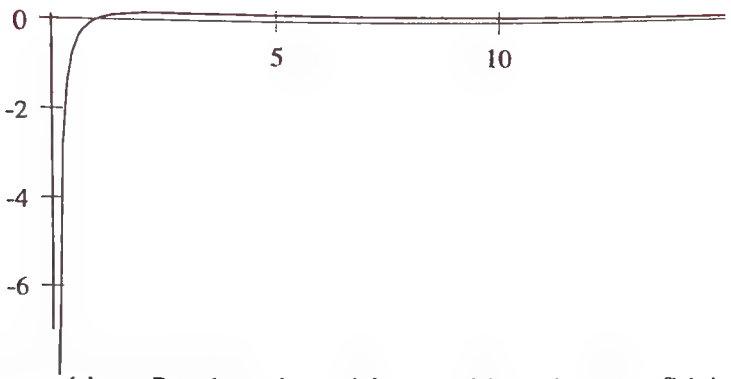
- Concavidad y convexidad: En $(-\infty, e^{3/2})$ la función es cóncava pues en este conjunto hay un máximo, mientras que en $(e^{3/2}, \infty)$ la función es convexa.
- Asíntotas:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

Por consiguiente, la gráfica de la función es la que aparece en la siguiente página.

b) La función $g(x) = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$ es una función definida en todo $\mathbf{R}$ (al no anularse el denominador), continua en todo $\mathbf{R}$ (al ser cociente de funciones continuas y el denominador positivo en dicho conjunto) y derivable sucesivamente en todo $\mathbf{R}$ (pues es cociente de funciones derivables y el denominador positivo).

- Simetrías: La función no es simétrica (ya que el denominador, e^x, no lo es y el numerador es simétrico respecto al eje Y).
- Cortes con los ejes: Corta al eje $\mathbf{X}$ en $x = 0$ puesto que $0 = f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ se verifica si y sólo si $x = 0$. Luego el único punto de corte con los ejes es $(0,0)$.



- Máximos y mínimos: Para determinar máximos y mínimos hacemos $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x},$$

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ x = 2 \end{cases},$$

pues sólo en esos puntos es posible la existencia de extremos relativos. Calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(2-2x)e^x - e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x},$$

y analizamos el valor de $f''(x)$ para $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$:

$f''(0) > 0$, luego existe un mínimo relativo en $x_1 = 0$.

$f''(2) < 0$, luego existe un máximo relativo en $x_2 = 2$.

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = \frac{4}{e^2}$, resulta que el punto $(0,0)$ es un mínimo relativo y el punto $(2,\frac{4}{e^2})$ es un máximo relativo.

- Crecimiento y decrecimiento: A la izquierda de $x = 0$ la función es decreciente, es decir, en $(-\infty,0)$ y entre $x = 0$ y $x = 2$ la función crece pues pasa de un mínimo a un máximo. A la derecha de $x = 2$ la función decrece, es decir, en $(2,\infty)$. Luego, $f(x)$ es creciente en $(0,2)$ y decreciente en $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$.

- Puntos de inflexión: En $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ y $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ existen dos puntos de inflexión pues

$$f''(x) = 0 \; ; \; \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases},$$

$f'''(2+\sqrt{2}) \neq 0$ y $f'''(2-\sqrt{2}) \neq 0$.

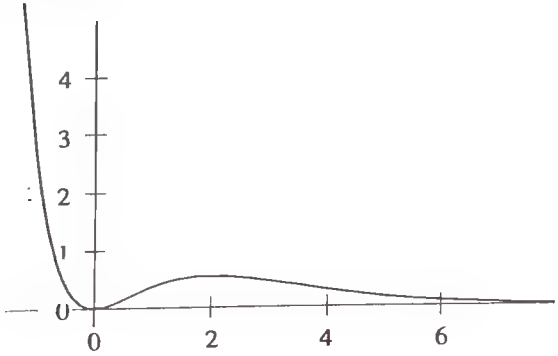
- Concavidad y convexidad: Si $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$ es $f''(x) > 0$ luego f es convexa.

  Si $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ es $f''(x) < 0$ luego f es cóncava.

- Asíntotas:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ (al aplicar l'Hôpital sucesivamente).}$$

La gráfica de la función f es



Problema 10

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

b) $\lim_{x \to 1^-} [(\log x)\log(1-x)]$

c) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$

d) $\lim_{x \to 0^+} (x \log^n(x))$.

Solución.

a) En este límite aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, que salvamos al aplicar reiteradamente la regla de l'Hôpital pues tanto numerador como denominador son funciones derivables.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2-x)e^x-x-2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+(2-x)e^x-1}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-e^x+(2-x)e^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-xe^x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

b) En este límite aparece la indeterminación $0\cdot\infty$ y ésta se transforma en una indeterminación $\frac{0}{0}$ al expresar la función como un cociente. A su vez esta última indeterminación se evita aplicando la regla de l'Hôpital varias veces.

$$\lim_{x\to 1^-}[(\log x)\log(1-x)]=\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1-x)}{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x\log^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\log^2 x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\log^2 x+2x\log x\frac{1}{x}}{-1}=0.$$

c) Al mostrar este límite la indeterminación 1^∞ se reduce al límite de una expresión en la que aparece una potencia del número e. Veámoslo:

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}=1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}$$ (basta con hacer la división),

luego, $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^x.$$

Si $t=\frac{x^2-4x+2}{2x-1}$, entonces cuando x tiende a infinito también lo hace t (t es un cociente de polinomios y es mayor el grado del numerador), y

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Además, $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x = \left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}\cdot\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot x} =$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}},$$

luego, deducimos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} = e^2.$$

d) En este límite procedemos de análoga forma a como se hizo en el apartado b). Vamos a proceder por inducción:

Para n = 1: $\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

Supongamos que para n - 1 es $\lim_{x\to 0^+} x\log^{n-1}(x) = 0$, y veamos que es cierto para n

$$\lim_{x\to 0^+} x\log^n(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log^n(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{n\log^{n-1}(x)\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left((-n) \, x \log^{n-1}(x) \right) = -n \cdot 0 = 0.$$

Luego, en efecto, $\lim_{x \to 0^+} \left(x \log^n(x) \right) = 0.$

TEMA 28

Primitivas de una función

Problema 1

Calcular

a) $I_1 = \int (x^5 + 2x^3 - \sqrt{x})\,dx$ b) $I_2 = \int (x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

c) $I_3 = \int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x + 1} dx$ d) $I_4 = \int \frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{2x} dx.$

Solución. Aplicamos las propiedades de las integrales indefinidas y la tabla de integrales inmediatas para resolver los apartados de este problema.

a) $I_1 = \int (x^5 + 2x^3 - \sqrt{x})\,dx = \int x^5 dx + \int 2x^3 dx - \int x^{1/2} dx$ (pues la integral de una suma es igual a la suma de las integrales)

$$= \frac{x^6}{6} + 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + K$$ (puesto que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$, si $n \neq -1$).

Conclusión: Las funciones primitivas de la función $f(x) = x^5 + 2x^3 - \sqrt{x}$ son de la forma $I_1 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + K$ donde K es un número real.

b) $I_2 = \int (x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = \int x dx + \int x^{-1} dx + \int x^{-1/2} dx$ (pues la integral de una suma es igual a la suma de las integrales)

$$= \frac{x^2}{2} + \log|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^2}{2} + \log|x| + 2\sqrt{x} + K \qquad \left(\text{pues } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, \text{ si } n \neq -1\right.$$

y $\int x^{-1} dx = \log x + K$).

Conclusión: Las funciones primitivas de la función $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ son de la forma $I_2 = \frac{x^2}{2} + \log|x| + 2\sqrt{x} + K$ donde K es un número real.

c) Inicialmente se reescribe el integrando con el fin de obtener un integral más sencilla, para ello, efectuamos la división de los polinomios (en el caso del producto y del cociente no se cumple que la integral indefinida del producto (cociente) sea igual al producto (cociente) de las integrales):

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x + 1} = x^2 + 1 - \frac{2}{x+1},$$

por tanto, $I_3 = \int (x^2 + 1 - \frac{2}{x+1})\, dx = \frac{x^3}{3} + x - 2\log|x+1| + K$

d) Previa a la integración operamos el integrando (la multiplicación y la división de polinomios) para reescribirlo de forma análoga a la integral anterior.

$$I_3 = \int \frac{(x^2-1)(x+2)}{2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x} dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x})\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} + x^2 - x - 2\log|x|) + K.$$

Problema 2

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (5x+7)^4 dx$ b) $\int \frac{(\log x)^5}{x} dx.$

Solución.

a) Esta integral se puede transformar en una integral inmediata de la forma

$$\int (f(x))^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + K.$$

Como no aparece en el integrando la expresión $f'(x)$, es decir, 5, realizamos los cambios siguientes

$$\int (5x+7)^4 dx = \frac{5}{5}\int (5x+7)^4 dx = \frac{1}{5}\int (5x+7)^4 5dx =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{(5x+7)^5}{5} = \frac{1}{25}(5x+7)^5 + K.$$

b) Análogamente, si $f(x) = \log x$, entonces

$$\int \frac{(\log x)^5}{x}dx = \int [f(x)]^5 f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^6}{6} + K = \frac{(\log x)^6}{6} + K.$$

Problema 3

Hallar las funciones primitivas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ c) $h(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

Solución. En este problema se deben determinar funciones derivables F(x), G(x) y H(x) tales que $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ y $H'(x) = h(x)$. Estas funciones no son únicas y están representadas por la integral indefinida en el caso de que el integrando sea una función continua (véase el enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo).

a) La función $F(x) = \text{arctg}x$ es una función primitiva de f(x) ($(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$) pues f(x) es una función continua y $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arctg}x + K.$

b) La función $G(x) = \dfrac{1}{2}\log|x^2+1|$ es una función primitiva de g(x), pues g(x) es una función continua y $\displaystyle\int g(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + K.$

c) Al observar la expresión de la fórmula de la integral de la potencia de una función derivable f(x), se comprueba que $\dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$ es una función primitiva de $(f(x))^n f'(x)$.

Luego, $H(x) = (-\frac{1}{2})(x^2+1)^{-1} = (-\frac{1}{2})\dfrac{1}{x^2+1}$ es una función primitiva de la función h(x). Obsérvese que h(x) es una función derivable y que

$$\int h(x)\,dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2}(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} = (-\frac{1}{2})\frac{1}{x^2+1} + K.$$

Problema 4

Aplicar el método de integración por partes para calcular:

a) $\int e^{-x}\cos x\,dx$ b) $\int (\log(1+x^2))\,dx$

c) $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$ d) $\int x\sqrt{5-2x}\,dx$.

Solución. La fórmula de integración por partes es $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$.

a) Para integrar por partes consideramos

$$u = e^{-x},\ \text{con}\ du = (-e^{-x})\,dx \quad ; \quad dv = \cos x\,dx,\ \text{con}\ v = \operatorname{sen} x.$$

Luego, $\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\operatorname{sen} x + \int e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx.$

Para resolver la segunda integral $\int e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$ aplicamos de nuevo este método,

$$u = e^{-x},\ \text{con}\ du = (-e^{-x})\,dx \quad ; \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx,\ \text{con}\ v = -\cos x.$$

Por tanto, $\int e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = (-e^{-x})\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx.$

Luego, $\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\operatorname{sen} x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx$, es decir,

$2\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Así pues, $\int e^{-x}\cos x\,dx = \dfrac{e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + K.$

b) Integramos por partes considerando

$$u = \log(1+x^2),\ \text{con}\ du = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad ; \quad dv = dx,\ \text{con}\ v = x.$$

Luego, $\int (\log(1+x^2))\,dx = x\log(1+x^2) - \int \dfrac{2x^2}{1+x^2}dx$

$$= x\log(1+x^2) - \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)dx = x\log(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + K.$$

c) Consideramos,

$$u = \operatorname{sen}(\log x)\ ,\ \text{con}\ du = \frac{1}{x}\cos(\log x)\,dx \quad ; \quad dv = dx\ \text{con}\ v = x,$$

por tanto, $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx = x\operatorname{sen}(\log x) - \int \frac{x}{x}\cos(\log x)\,dx.$

Hacemos lo mismo con $\int \cos(\log x)\,dx$,

$$u = \cos(\log x)\ ,\ \text{con}\ du = \frac{-1}{x}\operatorname{sen}(\log x)\,dx\ \ ;\ \ dv = dx,\ \text{con}\ v = x,$$

por consiguiente, $\int \cos(\log x)\,dx = x\cos(\log x) + \int \frac{x}{x}\operatorname{sen}(\log x)\,dx =$

$$= x\cos(\log x) + \int \operatorname{sen}(\log x)\,dx.$$

Luego, $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx = x\operatorname{sen}(\log x) - x\cos(\log x) - \int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$, es decir,

$$2\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx = x(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)).$$

Así pues, $\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx = \frac{x(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x))}{2} + K.$

d) Realizamos,

$$u = x,\ \text{con}\ du = dx\ \ ;\ \ dv = \sqrt{5-2x}\,dx,\ \text{con}\ v = -\frac{(5-2x)^{3/2}}{3},$$

luego, $\int x\sqrt{5-2x}\,dx = -\frac{x(5-2x)^{3/2}}{3} + \int \frac{(5-2x)^{3/2}}{3}\,dx =$

$$= -\frac{x(5-2x)^{3/2}}{3} - \frac{(5-2x)^{5/2}}{15} + K = -\frac{\sqrt{(5-2x)^3}}{15}(3x+5) + K.$$

Problema 5

Calcular las siguientes integrales mediante cambios de variable apropiados:

a) $\int x^3 \operatorname{tg}(x^4)\,dx$

b) $\int \cos x\ \log(\operatorname{sen} x)\,dx$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

d) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

Solución.

a) Como $(x^4)' = 4x^3$ entonces reescribimos la integral de la forma

$$\int x^3 \operatorname{tg}(x^4)\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \operatorname{tg}(x^4)\,dx,$$

así pues, hacemos el cambio de variable $t = x^4$ y, por tanto, $dt = 4x^3 dx$.

Nuevamente reescribimos la integral como

$$\int x^3 \operatorname{tg}(x^4)\,dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{tg} t\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt.$$

Mediante el cambio $u = \cos t$, así pues, $du = -\text{sen}t$,

$$\frac{1}{4}\int \text{tg}t\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{\text{sen}t}{\cos t} dt = \frac{-1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{-1}{4}\log u + K,$$

y al deshacer los cambios obtenemos: $\int x^3 \text{tg}(x^4)\, dx = \dfrac{-\log(\cos(x^4))}{4} + K.$

b) Para calcular esta integral (que es del tipo $\int f(\text{sen}x)\cos x\, dx$) hacemos el cambio de variable $t = \text{sen}x$, con $dt = \cos x\, dx$. Por tanto:

$$\int \cos x \log(\text{sen}x)\, dx = \int \log t\, dt.$$

El cálculo de esta última integral lo hacemos por integración por partes.

$$u = \log t, \text{ con } du = \frac{1}{t}dt \quad ; \quad dv = dt, \text{ con } v = t.$$

$$\int \log t\, dt = t\log t - \int dt = t\log t - t + K = t(\log t - 1) + K.$$

Así pues, $\int \cos x \log(\text{sen}x)\, dx = \text{sen}x\,[\log(\text{sen}x) - 1] + K.$

c) Hacemos el cambio de variable $t = x^3$ (adecuado por ser $(x^3)' = 3x^2$ y $x^6 = (x^3)^2$) tenemos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\text{arcsen}t + K = \frac{1}{3}\text{arcsen}x^3 + K.$$

d) Como $(e^x + 1)' = e^x$, se considera el cambio $t = e^x + 1$, luego $dt = e^x dx$.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + K = 2\sqrt{e^x + 1} + K.$$

Problema 6

Calcular

a) $\displaystyle\int \frac{3^{\text{tg}x}}{\cos^2 x} dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\text{sen}^2(\log x)} dx.$

Solución.

a) Si consideramos $f(x) = \text{tg}x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$ y, por tanto,

$$\int \frac{3^{\text{tg}x}}{\cos^2 x} dx = \int 3^{f(x)} f'(x)\, dx = \frac{3^{\text{tg}x}}{\log 3} + K.$$

b) Si consideramos $f(x) = \log x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}dx$ y, por tanto,

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{sen}^2(\log x)}dx = \int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(f(x))}f'(x)\,dx = -\cot g(f(x)) + K = -\cot g(\log x) + K$$

Problema 7

Hallar:

a) $\int \cos x \log(1+\mathrm{sen}x)\,dx$ b) $\int \mathrm{arctg}x\,dx$.

Solución.

a) Integramos por partes, haciendo $u = \log(1+\mathrm{sen}x)$ y $dv = \cos x dx$, con

$$du = \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}x}dx \quad y \quad v = \mathrm{sen}x,$$

$$I_1 = \int \cos x \log(1+\mathrm{sen}x)\,dx = \mathrm{sen}x \log(1+\mathrm{sen}x) - \int \frac{\mathrm{sen}x \cos x}{1+\mathrm{sen}x}dx.$$

Como $(\mathrm{sen}x)' = \cos x$, hacemos el cambio de variable $t = \mathrm{sen}x$ y obtenemos

$$I_1 = \mathrm{sen}x \log(1+\mathrm{sen}x) - \int \frac{t}{1+t}dt = \mathrm{sen}x \log(1+\mathrm{sen}x) - \int \frac{1-1+t}{1+t}dt =$$

$$= \mathrm{sen}x\,(\log(1+\mathrm{sen}x)) + \int \frac{1}{1+t}dt - \int \frac{1+t}{1+t}dt =$$

$$= \mathrm{sen}x\,(\log(1+\mathrm{sen}x)) + \log(1+t) - t + K =$$

$$= \mathrm{sen}x\,(\log(1+\mathrm{sen}x)) + \log(1+\mathrm{sen}x) - \mathrm{sen}x + K.$$

b) Consideramos $u = \mathrm{arctg}x$ y $dv = dx$, para integrar por partes, con

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad y \quad v = x.$$

Por tanto: $I_2 = \int \mathrm{arctg}x\,dx = x\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$$= x\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + K.$$

Problema 8

Calcular

a) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ b) $\int x\ \text{arctgx}\ dx$

c) $\int (2x^2+3x+4)\,e^{-x}dx$ d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$.

Solución.

a) Hacemos el cambio $t = e^x$, con $dt = e^x dx$,

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctgt} + K = \text{arctg}\,(e^x) + K.$$

b) Integramos por partes,

$$u = \text{arctgx},\ \text{con}\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad ; \quad dv = xdx,\ \text{con}\ v = \frac{1}{2}x^2,$$

luego, $\int x\ \text{arctgx}\ dx = \frac{1}{2}x^2(\text{arctgx}) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$

La integral $I_1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx =$

$$= \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \text{arctgx} + K.$$

Por tanto,

$$\int x\ \text{arctgx}\ dx = \frac{1}{2}x^2\text{arctgx} - \frac{1}{2}(x - \text{arctgx}) + K = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2+1)\,\text{arctgx} + K$$

c) Integramos por partes,

$$u = 2x^2+3x+4,\ \text{con}\ du = (3+4x)\,dx \quad ; \quad dv = e^{-x}dx,\ \text{con}\ v = -e^{-x}.$$

Entonces, $\int (2x^2+3x+4)\,e^{-x}dx = -(2x^2+3x+4)\,e^{-x} + \int (3+4x)\,e^{-x}dx.$

La integral $I_1 = \int (3+4x)\,e^{-x}dx$ se calcula por partes nuevamente

$$u = 3+4x,\ \text{con}\ du = 4dx \quad ; \quad dv = e^{-x}dx,\ \text{con}\ v = -e^{-x}.$$

Luego, $I_1 = -(3+4x)\,e^{-x} - \int -4e^{-x}dx = -(3+4x)\,e^{-x} - 4e^{-x}$, por tanto,

$$\int (2x^2+3x+4)\,e^{-x}dx = (-(2x^2+3x+4))\,e^{-x} - (3+4x)\,e^{-x} - 4e^{-x} =$$

$$= -(11+7x+2x^2)\,e^{-x}.$$

La solución es: $\int (2x^2+3x+4)\,e^{-x}dx = -(11+7x+2x^2)\,e^{-x}+K.$

d) Consideramos el cambio $t = \log x$, con $dt = \frac{1}{x}dx$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \operatorname{arcsen} t + K = \operatorname{arcsen}(\log x) + K.$$

Problema 9

Determinar la función primitiva de la función $f(x) = (x^2+x+1)\operatorname{sen} x$ cuya gráfica incide en el punto A(0,-1).

Solución. Hallamos primero la integral indefinida de la función para después calcular el valor de la constante K imponiendo la condición del punto A.

La integral indefinida $I = \int (x^2+x+1)\operatorname{sen} x\,dx$ la calculamos por partes,

$$u = x^2+x+1, \text{ con } du = (2x+1)\,dx \;;\; dv = \operatorname{sen} x\,dx, \text{ con } v = -\cos x,$$

$$\int (x^2+x+1)\operatorname{sen} x\,dx = -(x^2+x+1)\cos x + \int (2x+1)\cos x\,dx,$$

y al aplicar el método de integración por partes para la última integral

$$u = 2x+1, \text{ con } du = 2dx \;;\; dv = \cos x\,dx, \text{ con } v = \operatorname{sen} x,$$

$$\int (2x+1)\cos x\,dx = (2x+1)\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,dx = (2x+1)\operatorname{sen} x + 2\cos x + K.$$

Por consiguiente

$$\int (x^2+x+1)\operatorname{sen} x\,dx = -(x^2+x+1)\cos x + (2x+1)\operatorname{sen} x + 2\cos x + K.$$

Sea $F(x) = -(x^2+x+1)\cos x + (2x+1)\operatorname{sen} x + 2\cos x + K$ la función primitiva buscada. Como su gráfica pasa por el punto (0,-1), entonces F(0) = -1, es decir,

$$-1 = -1+2+K \Rightarrow K = -2.$$

La función es $F(x) = -(x^2+x+1)\cos x + (2x+1) + \operatorname{sen} x + 2\cos x - 2.$

Problema 10

Calcular las siguientes integrales mediante los cambios que se indican:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \; x = \frac{1}{t}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(1+x)^3}}, \; x+1 = t^2$

c) $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$, $x+1 = 2tgt$.

Solución.

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} =$ (cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ y $dx = -\frac{dt}{t^2}$)

$$= \int \frac{-dt}{(\frac{1}{t}\cdot t^2)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\log(t+\sqrt{1+t^2}) + K =$$

(pues es integral inmediata) $= -\log\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\right)+K = -\log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)+K$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(1+x)^3}} =$ (cambio de variable $x+1 = t^2$ y $dx = 2tdt$)

$$= \int \frac{2tdt}{t+t^3} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\text{arctgt} + K = 2\text{arctg}(\sqrt{x+1}) + K.$$

c) Al considerar el cambio de variable $x+1 = 2tgt$, con $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$, resulta

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{4(tgt)^2+4} = \int \frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{4((tgt)^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\text{arctg}(\frac{x+1}{2}) + K.$$

TEMA 29

Cálculo de primitivas

Problema 1

Calcular $I = \int \frac{x^3+1}{x^2+5x+6}dx$.

Solución. Como el numerador es de mayor grado que el del denominador, dividimos

$$\frac{x^3+1}{x^2+5x+6} = x-5+\frac{19x+31}{x^2+5x+6}, \text{ luego, } I = \int x dx - 5\int dx + \int \frac{19x+31}{x^2+5x+6}dx.$$

Calculemos $I_1 = \int \frac{19x+31}{x^2+5x+6}dx$, descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{19x+31}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=19 \\ 3A+2B=31 \end{cases}, \text{ de solución}$$

$A = -7$ y $B = 26$.

Así pues, $I_1 = \int \frac{-7}{x+2}dx + \int \frac{26}{x+3}dx = -7\log|x+2| + 26\log|x+3|$.

Luego, $I = \frac{x^2}{2} - 5x + \log\frac{|x+3|^{26}}{|x+2|^7} + K$.

Problema 2

Hallar $I = \int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$

Solución. Como el denominador es irreducible, entonces intentamos obtener la derivada del denominador en el numerador con una transformación sencilla como sumar y restar 1.

$$I = \int \frac{x+1-1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{-1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{-1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| - \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx.$$

La integral $I_1 = \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ se realiza completando cuadrados:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x+1) + K.$$

Por tanto, $\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| - \operatorname{arctg}(x+1) + K.$

Problema 3

Dados $P(x) = x^3 - 3x + 3$ y $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$. Calcular $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Solución. Descomponemos el denominador en factores irreducibles

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x^2+1)(x-2)^2$$

y la fracción en $\frac{x^3-3x+3}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$, de donde,

$x^3 - 3x + 3 = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2.$

Al igualar coeficientes y resolver el sistema resultante se obtiene la solución

$$A = 1,\ B = 1,\ C = 0 \text{ y } D = 1.$$

En consecuencia,

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \log|x-2| - \frac{1}{x-2} + \operatorname{arctg}x + K.$$

Problema 4

Hallar:

$$\text{a)}\ \int \frac{x-1}{x\,(x^2+1)}\,dx. \qquad \text{b)}\ \int \frac{dx}{(x^2+1)\,(x-2)^2}$$

Solución.

a) La descomposición en fracciones simples del integrando racional es

$$\frac{x-1}{x\,(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\,(x^2+1)+x\,(Bx+C)}{x\,(x^2+1)},$$

Al identificar los numeradores, $Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = x - 1$, y de esta ecuación resulta,

$$A+B=0,\ C=1,\ A=-1 \ \Rightarrow\ A=-1, B=1 \text{ y } C=1.$$

Así pues, $I = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = -\log|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$

$$= -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + K.$$

b) Descomponemos la función integrando en fracciones teniendo en cuenta que el denominador tiene una raíz doble.

$$\frac{1}{(x^2+1)\,(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A\,(x-2)\,(x^2+1) + B\,(x^2+1) + (Cx+D)\,(x-2)^2}{(x-2)^2\,(x^2+1)},$$

e identificamos los numeradores,

$$1 = (A + C)\,x^3 + (-2A + B + D - 4C)\,x^2 + (A - 4D + 4C)\,x + (-2A + B + 4D)$$

de donde identificando coeficientes se obtiene un sistema de solución,

$$A = -\frac{4}{25},\ B = \frac{1}{5},\ C = \frac{4}{25} \text{ y } D = \frac{3}{25}.$$

Luego, $I = -\frac{4}{25}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{\frac{4}{25}x + \frac{3}{25}}{x^2+1}\,dx =$

$$= \left(-\frac{4}{25}\right)\log|x-2| - \frac{1}{5\,(x-2)} + \frac{2}{25}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \frac{3}{25}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \left(-\frac{4}{25}\right)\log|x-2| - \frac{1}{5\,(x-2)} + \frac{2}{25}\log|x^2+1| + \frac{3}{25}\operatorname{arctg} x + K.$$

Problema 5

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ b) $\int \frac{x^2}{x+1}dx$

c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ d) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

Solución.

a) Podemos reescribir el integrando como $\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}$, por tanto,

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2+1}dx,$$

y, mediante el cambio de variable $t = \frac{x}{2}$, con $dt = \frac{1}{2}dx$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\text{arctgt} + K.$$

Al deshacer el cambio se tiene $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\text{arctg}(\frac{x}{2}) + K.$

b) Como el numerador es de mayor grado que el denominador, dividimos inicialmente

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

luego, $\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + K$

c) Como la derivada del denominador $f(x) = x^2+1$ es $f'(x) = 2x$, multiplicamos y dividimos por 2,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + K = -\frac{1}{2(x^2+1)} + K.$$

d) Para descomponer en fracciones simples el integrando, calculamos las raíces del

denominador, $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ y $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$, de donde

$$1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C) = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A + C.$$

Al igualar coeficientes se obtiene el sistema,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}, \text{de solución, } A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3} \text{ y } C=\frac{2}{3}.$$

Por tanto, $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{(-\frac{1}{3})x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$

En la integral $I_1 = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ intentaremos obtener la derivada del denominador en el numerador multiplicando y dividiendo por 2,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \int \frac{3}{x^2-x+1}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx.$$

Calculamos $I_2 = \int \frac{1}{x^2-x+1}dx$ reescribiendo el denominador de la forma $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ y realizando posteriormente el cambio de variable $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$, con $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$, que convierte a I_2 en una integral inmediata:

$$I_2 = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}}\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctgt} + K =$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K.$$

Luego, $\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K$

Problema 6

Calcular $I = \int tg^2(x)\,dx$.

Solución. Si al integrando se le suma y se le resta 1 la integral se reescribe como

$$\int tg^2(x)\,dx = \int (tg^2(x) + 1 - 1)\,dx = \int (tg^2(x) + 1)\,dx - \int dx = tg(x) - x + K.$$

Otra forma de hacerla es considerar el cambio $t = tg\ x$ de donde $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ ($tg^2x = \sec^2x - 1$).

$$I = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - arctgt + K = tg(x) - x + K.$$

Problema 7

Calcular la integral indefinida de la función $f(x) = \dfrac{1}{sen3x + senx}$.

Solución. Aplicamos la fórmula del Problema 11 del Tema 11, que expresa la suma de dos senos como un producto de seno por coseno,

$sen\ 3x + sen\ x = 2\ sen\ 2x \cos x = 4\ senx\ \cos^2x$, (la última igualdad se obtiene por la fórmula del seno del ángulo doble, Tema 11)

y sustituimos en f(x),

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{4senx\cos^2x} = \frac{1}{4}\int \frac{senxdx}{sen^2x\cos^2x}.$$

Al hacer el cambio (es una función impar en senx) $t = \cos x$, con $dt = -sen\ x\,dx$, resulta (teniendo en cuenta la identidad $sen^2x = 1 - \cos^2x$)

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)},$$

y al descomponer el integrando

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t},$$

de donde,

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\log|1-t| - \frac{1}{8}\log|1+t| + K = \frac{1}{4\cos x} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + K =$$

$$= \frac{1}{4\cos x} + \log \left| \sqrt[8]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right| + K.$$

Problema 8

Calcular:

a) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ b) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

Solución.

a) Hacemos el cambio $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, con $dt = \frac{(1+t^2)}{2}dx$ donde

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} 2(\frac{x}{2})}{1} = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})} \text{ (dividiendo por } \cos^2(\tfrac{x}{2}))$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

por tanto, $$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| = \log\left|\operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right| + K.$$

b) Reescribimos el integrando utilizando la igualdad $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$,

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,(1-\cos^2 x)^2\,dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx - 2\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx +$$

$$+ \int \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + K.$$

Problema 9

Calcular la integral indefinida de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\int \sec^4 2x \operatorname{tg}^5 2x\,dx$. b) $\int \cos x \operatorname{sen} 5x\,dx$.

Solución.

a) Como la potencia de la secante es par, separamos un factor $\sec^2 2x$ para poder considerar el cambio de variable $u = \operatorname{tg} 2x$, con $du = 2\sec^2 2x\,dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x \operatorname{tg}^5 2x\,(2\sec^2 2x\,dx) = \frac{1}{2}\int (1+\operatorname{tg}^2 2x)\operatorname{tg}^5 2x\,(2\sec^2 2x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{tg}^5 2x + \operatorname{tg}^7 2x)\,2\sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}^6 2x}{6} + \frac{\operatorname{tg}^8 2x}{8}\right) + K.$$

b) Utilizamos la fórmula $\operatorname{sen} ax \cos bx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x)$ (que se obtiene del Problema 11 del Tema 11),

$$I = \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(4x) + \operatorname{sen}(6x))\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos 6x}{6} - \frac{1}{2}\frac{\cos 4x}{4} + K = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + K.$$

Problema 10

Calcular

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x + \cos x}$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

Solución.

a) Hacemos el cambio $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ de donde $x = 2\operatorname{arctg} t$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Además,

$$\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ (ver Problema 7)}, \quad \cos x = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2dt}{-t^2+2t+1} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2}.$$

Calculamos $I_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{(t-1)^2-2}$ descomponiendo el integrando en fracciones simples de la forma $\frac{1}{(t-1)^2-2} = \frac{A}{(t-1)+\sqrt{2}} + \frac{B}{(t-1)-\sqrt{2}}$, con $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ y $B = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Por tanto, $\int \frac{dt}{(t-1)^2-2} = \int \frac{dt}{((t-1)+\sqrt{2})((t-1)+\sqrt{2})} =$

$$\int \frac{A}{(t-1.)+\sqrt{2}}dt + \int \frac{B}{(t-1)-\sqrt{2}}dt = (-\frac{\sqrt{2}}{4})\int \frac{1}{(t-1)+\sqrt{2}}dt + \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{(t-1)-\sqrt{2}}dt =$$

$$= (-\frac{\sqrt{2}}{4})\log|(t-1)+\sqrt{2}| + \frac{\sqrt{2}}{4}\log|(t-1)-\sqrt{2}| + K = \frac{\sqrt{2}}{4}\log\left|\frac{(t-1)-\sqrt{2}}{(t-1)+\sqrt{2}}\right| + K.$$

Por tanto, $I = \frac{-\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{(t-1)-\sqrt{2}}{(t-1)+\sqrt{2}}\right| + K$, y al deshacer el cambio,

$$I = \frac{-\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{(t-1)-\sqrt{2}}{(t-1)+\sqrt{2}}\right| + K = \frac{-\sqrt{2}}{2}\log\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right| + K.$$

b) La integral se puede reescribir (utilizando la igualdad $1 = sen^2x + cos^2x$) como,

$$\int senx\,sen^2x\cos^3x\,dx = \int senx\,(1-\cos^2x)\cos^3x\,dx =$$

$$= \int senx\cos^3x\,dx - \int senx\cos^5x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4x + \frac{1}{6}\cos^6x + K.$$

c) Como el integrando es impar en cosx (cambia el signo al cambiar cosx por -cosx), hacemos el cambio de variable $senx = t$, con $\cos x\,dx = dt$.

$$\int \frac{1}{\cos^3x}dx = \int \frac{1}{\cos^4x}dt = \int \frac{1}{(1-(senx)^2)^2}dt = \int \frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

Descomponemos el integrando en fracciones simples,

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(1+t)^2}$$

luego, $\int \frac{1}{(1-t^2)^2}dx = -\frac{1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{4}\log|1+t| + \frac{1}{4(1-t)} - \frac{1}{4(1+t)}$,

$$\int \frac{1}{\cos^3x}dx = -\frac{1}{4}\log|1-senx| + \frac{1}{4}\log|1+senx| + \frac{1}{4(1-senx)} - \frac{1}{4(1+senx)} + K.$$

d) Como el integrando es una función par en senx y cosx (no se altera al cambiar simultáneamente senx por -senx y cosx por -cosx), hacemos el cambio de variable

$$t = tgx \Rightarrow x = arctgt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

además, $\cos x = \dfrac{1}{\sec x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(tgx)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ y $\operatorname{sen} x = tgx \cdot \cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

La integral mediante el cambio anteriormente descrito será,

$$\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\cos^2 x dx = \int \operatorname{cotg}^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2 t^2}$$

Descomponemos el integrando $\dfrac{1}{(1+t^2)^2 t^2} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t^2} + \dfrac{Cx+D}{1+t^2} + \dfrac{Ex+F}{(1+t^2)^2}$ donde

$A = 0, B = 1, C = 0, D = -1, E = 0$ y $F = -1$ (obtenido de igualar numeradores y coeficientes).

Por tanto,

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2 t^2} = \int \frac{1}{t^2}dt - \int \frac{dt}{(1+t^2)} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctgt} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Para calcular $I = \int \dfrac{1}{(1+t^2)^2}dt$ sumamos y restamos t^2 al numerador,

$$I = \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \operatorname{arctgt} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$

Para calcular esta última integral empleamos el método de integración por partes,

$$u = t, \text{ con } du = dt, \text{ y } dv = \frac{tdt}{(1+t^2)^2}, \text{ con } v = -\frac{1}{2(1+t^2)},$$

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctgt} + K.$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2 t^2}dt = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctgt} - \operatorname{arctgt} + \frac{1}{2}\operatorname{arctgt} - \frac{t}{2(1+t^2)} =$$

$$= -\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\operatorname{arctgt} - \frac{t}{2(1+t^2)} + K.$$

Al deshacer el cambio se tiene

$$\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x - \frac{3}{2}x - \frac{tgx}{2(1+tg^2 x)} + K.$$

TEMA 30

La integral definida

Problema 1

Sea $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ una función integrable en $[a,b]$ tal que $f(x) > c \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Probar que $\int_a^b f(x)\,dx > c\,(b-a)$.

Solución. Como f es integrable en $[a,b]$, entonces para cualquier función escalonada $s(x)$ tal que $s(x) \leq f(x)$ con $x \in [a,b]$ se cumple que

$$\int_a^b s(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.1}$$

La función $s(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$, es una función escalonada para la partición

$$P = \{x_0 = a < b = x_1\} \quad \text{y} \quad \int_a^b s(x)\,dx = c\,(b-a). \tag{1.2}$$

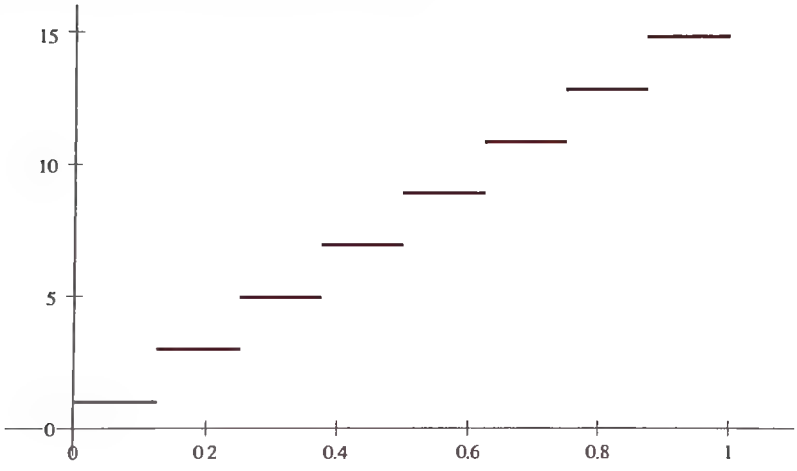
Luego, de (1.1) y (1.2) se deduce que $\int_a^b f(x)\,dx > c\,(b-a)$.

Problema 2

Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ siendo f la función $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2k+1 & \text{si} \quad x \in \left(\frac{k}{8}, \frac{k+1}{8}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, ..., 7$$

Solución. Esta función es escalonada y su gráfica es



$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} + ... + 15 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(1 + 3 + ... + 15) = 8.$$

Problema 3

Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a)} \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \qquad\qquad \text{b)} \quad g(x) = \int_0^{x^2+1} t^2\,dt.$$

Solución. Para estas funciones aplicaremos el Teorema Fundamental del Cálculo.

a) Se aplica directamente el Teorema Fundamental del Cálculo (ya que la función $t(x) = \frac{1}{1+x}$ es una función continua en $\mathbf{R}^+$). Luego, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

b) La función $g(x)$ se puede expresar como una composición de funciones

$$g(x) = h_1(x) \circ h_2(x) \quad \text{donde} \quad h_1(x) = \int_0^x t^2\,dt \quad \text{y} \quad h_2(x) = x^2 + 1.$$

Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral (al ser la función $s(t) = t^2$ continua) se

tiene que la función $h_1(x)$ es derivable y su derivada es $h'_1(x) = x^2$.

La función $h_2(x) = x^2 + 1$ es una función derivable en todo $\mathbf{R}$ (por ser polinómica), con derivada $h'_2(x) = 2x$.

Así pues, la función $g(x)$ es una función derivable por ser composición de funciones derivables, y aplicamos la regla de la cadena, puesto que esta función es una composición de las funciones h_1 y h_2,

$$g'(x) = h'_1(h_2(x)) \cdot h'_2(x) = (x^2+1)^2 \cdot 2x = 2x^5 + 4x^2 + 2x.$$

Problema 4

Sea f una función continua en $\mathbf{R}$ y se define $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$. Calcular $F'(x)$.

Solución. Como para definir F se integra respecto a t, entonces la variable x puede salir de la integral, pudiendo expresarse la función como un producto de funciones,

$$F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt,$$

así pues, derivamos $F(x)$ aplicando la derivada de un producto

$$F'(x) = 1 \cdot \int_0^x f(t)\,dt + x \cdot f(x),$$

donde para calcular la derivada del segundo factor hemos aplicado el primer Teorema Fundamental del Cálculo, puesto que la función f es continua.

Problema 5

Calcúlese

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (t^3+t^2)\,dt}{x^4}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$

Solución.

a) La función $F(x) = \int_0^x (t^3 + t^2)\,dt$ es una función primitiva de la función $f(x) = x^3 + x^2$ que es una función continua, es decir, $F'(x) = f(x)$. Además, tanto la función numerador como la fución denominador son funciones positivas en $\mathbf{R}^+$ y derivables, así pues, al aplicar las propiedades de los límites se produce la indeterminación $\frac{0}{0}$ que se salva al aplicar la regla de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2)\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

(pues se calcula la derivada del numerador aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo).

b) Análogamente, aplicamos la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} t^2 dt\right)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{2x^3} = 0$$

(pues el cálculo de $\left(\int_0^{x^2} t^2 dt\right)'$ se hace de manera análoga al apartado b del Problema 3).

Problema 6

Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x - x^3$ y el eje X.

Solución. Inicialmente, calculamos los puntos de corte de la gráfica con el eje X, es decir, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$,

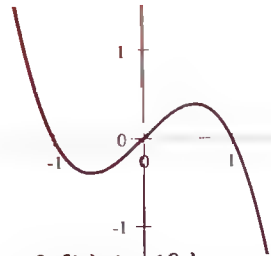
$$x - x^3 = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases},$$

las raíces son $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

A continuación, estudiamos el signo de la función f en cada uno de los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. Obsérvese que $f(x) \le 0$ si $x \in [-1, 0]$ y que $f(x) \ge 0$ si $x \in [0, 1]$ (esto se observa en la gráfica directamente o se puede observar dando un valor de cada intervalo), por tanto,

$$\text{Area} = \text{Area}(A_1 \cup A_2) = \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2),$$

ya que la gráfica delimita dos áreas diferenciadas, una "negativa", es decir, situada por debajo



del eje X, $A_1 = \{(x,y) : -1 \le x \le 0,\ f(x) \le y \le 0\}$, y otra "positiva", es decir, situada por encima del eje X, $A_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\}$. Además,

$$\text{Area}(A_1) = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx \quad ; \quad \text{Area}(A_2) = \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx .$$

Como la función es simétrica respecto al origen, entonces $\text{Area}(A_1) = \text{Area}(A_2)$.

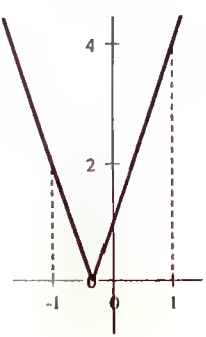
$$\text{Area}(A_1 \cup A_2) = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Problema 7

Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} |3x + 1|\,dx$.

Solución. Aplicamos la definición de valor absoluto para modificar la expresión de la función como

$$f(x) = |3x + 1| = \begin{cases} -3x - 1 & \text{si} \quad x < -\dfrac{1}{3} \\ 3x + 1 & \text{si} \quad x \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$



Por tanto, reescribimos la integral descomponiéndola en dos:

$$\int_{-1}^{1} |3x+1|\,dx = \int_{-1}^{-1/3} (-3x-1)\,dx + \int_{-1/3}^{1} (3x+1)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{-1/3} + \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1/3}^{1} = \frac{10}{3}.$$

Problema 8

Calcular las siguientes integrales mediante la fórmula de integración por partes:

a) $\int_1^2 \log x\,dx$ b) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

c) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ d) $\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$.

Solución.

a) Consideramos $u = \log x$, con $dv = dx$; $du = \frac{1}{x}dx$, con $v = x$,

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.$$

Así pues,

$$\int_1^2 \log x\,dx = (x\log x - x)\,|_1^2 = 2\log 2 - 2 - (1\log 1 - 1) = 2\log 2 - 1 = \log\frac{4}{e}.$$

b) Integramos por partes haciendo $u = x$, con $du = dx$; $dv = \cos x\,dx$, con $v = \operatorname{sen} x$.

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + K.$$

Así pues,

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = (x\operatorname{sen} x + \cos x)\,|_0^{\pi} = \pi\operatorname{sen}\pi + \cos\pi - (0\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = -1 - 1 = -2.$$

c) En el Problema 7 del Tema 28, apartado b, calculamos que

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log|1 + x^2| + K.$$

Por tanto, $\int_0^1 \text{arctgx}dx = \left(x\text{arctgx} - \frac{1}{2}\log|1+x^2|\right)\Big|_0^1 =$

$$= 1\,\text{arctg}1 - \frac{1}{2}\log 2 - (0\,\text{arctg}0 - \frac{1}{2}\log 1) = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}.$$

d) Este apartado lo escribimos de otra forma. Hacemos los cambios $u = e^x$, con $du = e^x dx$, y $dv = \cos x dx$, con $v = \text{sen}x$, para integrar por partes.

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx = e^x \text{sen}x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \text{sen}x dx =$$

$$= e^\pi \text{sen}\pi - e^0 \text{sen}0 - \int_0^\pi e^x \text{sen}x dx = -\int_0^\pi e^x \text{sen}x dx.$$

Nuevamente integramos por partes para determinar $\int_0^\pi e^x \text{sen}x dx$,

$$\int_0^\pi e^x \text{sen}x dx = \left((-e^x)\cos x\right)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x dx.$$

Por tanto, de $\int_0^\pi e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx$ se deduce que

$$2\int_0^\pi e^x \cos x dx = e^x \cos x\Big|_0^\pi \Rightarrow \int_0^\pi e^x \cos x dx = \frac{e^x \cos x\Big|_0^\pi}{2} = \frac{-e^\pi - 1}{2}.$$

Problema 9

Calcular las siguientes integrales mediante cambios de variable apropiados:

a) $\int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x} dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \text{sen}x\cos^3 x dx$

c) $\int_0^{\pi/4} \text{tg}^3 x dx$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Solución.

a) Hacemos el cambio de variable $t = \log x$, con $dt = \frac{1}{x}dx$, además, observamos como cambian los límites de la integral definida en la nueva variable

$$\text{si } x = 1 \Rightarrow t = 0 \quad \text{y} \quad \text{si } x = 2 \Rightarrow t = \log 2.$$

Al sustituir el cambio se tiene:

$$\int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x}dx = \int_0^{\log 2} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\log 2} = \frac{(\log 2)^3}{3}.$$

b) Como el integrando es una función impar en sen x, entonces hacemos el cambio de variable $t = \cos x$, con $dt = -\text{sen}\, x dx$. Por consiguiente, para los límites de integración

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow t = 1 \quad \text{y} \quad \text{si } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}x\cos^3 x dx = -\int_1^0 t^3 dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^0 = \frac{1}{4}.$$

c) Hacemos el cambio de variable $t = \text{tg}x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, y

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{y} \quad \text{si } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1.$$

$$\int_0^{\pi/4} \text{tg}^3 x dx = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int_0^1 (t - \frac{t}{1+t^2})\,dt = \int_0^1 t dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\log|1+t^2|\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 1 = \frac{1}{2}(1 - \log 2).$$

d) Transformamos convenientemente la integral antes de efectuar el cambio de variable

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} + 1}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}}.$$

El cambio a considerar es $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$ con $\frac{2}{\sqrt{3}}dx = dt$,

$$\text{si } x=0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \text{si } x=1 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\sqrt{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \log(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \log(\sqrt{3}+2) - \log(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \log(\sqrt{3}+2) - \log\sqrt{3} = \log\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

Problema 10

Hallar el área de los recintos limitados por las funciones dadas en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = \text{sen}x$ en $[0,\frac{1}{2}]$.

b) $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \text{sen}x$ en $[0,\frac{\pi}{4}]$.

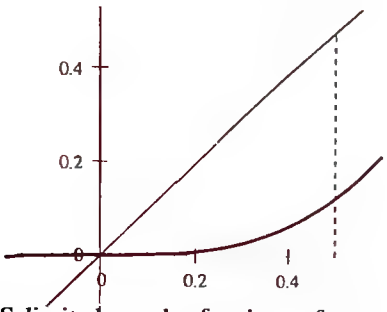
c) $f(x) = \cos^2 x$ y $g(x) = 2$ en $[0,2\pi]$.

Solución.

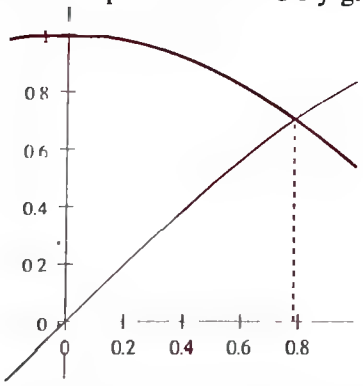
a) Observemos el recinto S limitado por las funciones f y g.

Para cada $x \in [0,\frac{1}{2}]$ se verifica que $f(x) \leq g(x)$, así pues, el área de S es

$$\int_0^{1/2} (\text{sen}x - x^3)\,dx = (-\cos x - \frac{x^4}{4})\Big|_0^{1/2} = -\cos(\frac{1}{2}) - \frac{1}{64} - (-1) = \frac{63}{64} - \cos(\frac{1}{2}).$$



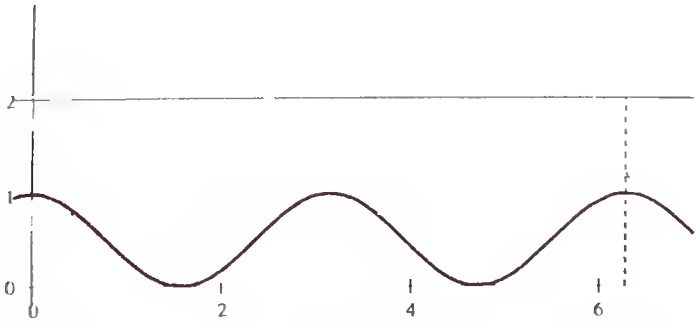
b) Observemos el recinto S limitado por las funciones f y g.



Para cada $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$ se verifica que $g(x) \leq f(x)$, así pues, el área de S es

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = \sqrt{2} - 1$$

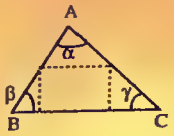
c) Análogamente, observemos el recinto S limitado por las funciones f y g.



Para cada $x \in [0,2\pi]$ se verifica que $f(x) \leq g(x)$, así pues, el área de S es

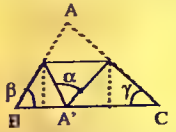
$$\int_0^{2\pi} (2-\cos^2 x)\,dx = \int_0^{2\pi} (2-\frac{1+\cos 2x}{2})\,dx = (\frac{3}{2}x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4})\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

- Pliegue por una recta paralela al lado BC de modo que el vértice A se sitúe sobre el lado BC.



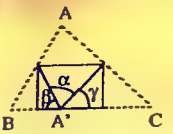
- Pliegue por las rectas perpendiculares a BC de modo que los vértices B y C se sitúen donde se encuentra A después del primer pliegue.

Solución. Realizado el primer pliegue se muestra la siguiente figura,



y obsérvese como hemos construido un ángulo con vértice A' y cuya medida es también α.

Al realizar ahora los otros dos pliegues el resultado es:



Al hacer estos pliegues se obtienen dos nuevos ángulos con vértice A' de medidas β y γ Dado que los tres ángulos con vértice A' suman un ángulo cuyo vértice es A' y las dos semirrectas que lo definen están sobre la misma recta (la recta que contiene al lado BC) tenemos así que $\alpha+\beta+\gamma$ es π.

Problema 4

En la figura siguiente se conocen las siguientes medidas de segmentos: AC es 8 m, AC_1 es 10 m y C_1B_1 es 5 m. Si se sabe que la recta que contiene a CB es paralela a la recta que contiene a C_1B_1, calcúlese la medida de CB.

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

AYUNTAMIENTO
GALERIA ARTESANAL
EL POPULO
VISITORS
CENTRE
JAR'23

JAR'23